

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 1° maggio 1904.

P. BLASERNA, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Zoologia. — *Sul processo di riproduzione della Joenia.* Nota del Socio B. GRASSI e del D.^r ANNA FOÀ.

Fisiologia. — I. *Come sulle montagne diminuisca la sensibilità per l'anidride carbonica inspirata. Esperienze fatte sull'uomo.* — II. *Nella depressione barometrica diminuisce la sensibilità per l'anidride carbonica. Esperienze sugli animali.* — III. *La rapidità dello scambio gassoso nei polmoni. Il tempo di reazione per l'anidride carbonica inspirata. L'espiazione attiva.* — IV. *L'arresto del respiro e le modificazioni della sua durata nell'aria rarefatta e sulle montagne.* Note del Socio A. MOSSO.

Patologia vegetale. — *Nuove osservazioni sulla peronospora del frumento.* Nota del Corrispondente G. CUBONI.

Le Note precedenti saranno pubblicate nei prossimi fascicoli.

Matematica. — *Sui fondamenti della Geometria intrinseca non-euclidea.* Nota del Corrispondente E. CESÀRO⁽¹⁾.

Per liberare la Geometria intrinseca piana dal postulato di Euclide è necessario riferire i punti del piano al più generale sistema di coordinate curvilinee, assumendo

$$(1) \quad E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2,$$

con E, F, G funzioni qualunque delle coordinate u, v , come espressione del quadrato della distanza fra i punti (u, v) ed $(u + \delta u, v + \delta v)$, infinitamente vicini. Se poi si vuole che il reticolo delle linee coordinate possa rigidamente spostarsi nel piano, in tutti i sensi, ognun sa che deve risultare *costante*, in tutto il piano, il noto invariante K, che nell'ipotesi di Euclide ha il valore zero. Ora s'immagini che il detto reticolo vada occupando una semplice infinità di posizioni, in corrispondenza dei valori d'un parametro t . In ciascuna di esse ogni punto, *fisso* nel piano, avrà coordinate dipendenti dal valore di t ; ed al variare di questo le coordinate stesse varieranno con rapidità vincolata unicamente alla posizione del punto nel piano, sicchè si avrà

$$(2) \quad \frac{du}{dt} = \varphi(u, v) \quad , \quad \frac{dv}{dt} = \psi(u, v) ,$$

con φ e ψ che pur dipendono dai coefficienti della forma fondamentale (1). Per ogni punto mobile la rapidità di variazione delle coordinate, rispetto al reticolo pensato per un istante come immobile, verrà misurata mediante gli eccessi dei primi sui secondi membri delle (2); e però queste, prese insieme, esprimono anche quanto *basta* per l'immobilità del punto (u, v) . Applicandole al punto $(u + \delta u, v + \delta v)$ si trova

$$\frac{d}{dt} \delta u = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \delta u + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \delta v \quad , \quad \frac{d}{dt} \delta v = \frac{\partial \psi}{\partial u} \delta u + \frac{\partial \psi}{\partial v} \delta v.$$

D'altra parte l'espressione (1), quadrato della distanza fra due punti *fissi*, non può variare con t . Ne segue che dev'essere

$$(E\delta u + F\delta v) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \delta u + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \delta v \right) + (F\delta u + G\delta v) \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} \delta u + \frac{\partial \psi}{\partial v} \delta v \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial E}{\partial u} \delta u^2 + 2 \frac{\partial F}{\partial u} \delta u \delta v + \frac{\partial G}{\partial u} \delta v^2 \right) \varphi + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial E}{\partial v} \delta u^2 + 2 \frac{\partial F}{\partial v} \delta u \delta v + \frac{\partial G}{\partial v} \delta v^2 \right) \psi = 0 ,$$

(¹) Presentata nella seduta del 24 aprile 1904.

qualunque siano δu e δv ; e per conseguenza

$$(3) \quad \begin{cases} E \frac{\partial \varphi}{\partial u} + F \frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial E}{\partial u} \varphi + \frac{\partial E}{\partial v} \psi \right) = 0, \\ E \frac{\partial \varphi}{\partial v} + F \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) + G \frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial u} \varphi + \frac{\partial F}{\partial v} \psi = 0, \\ F \frac{\partial \varphi}{\partial v} + G \frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial G}{\partial u} \varphi + \frac{\partial G}{\partial v} \psi \right) = 0. \end{cases}$$

Qui conviene introdurre i simboli di Christoffel ⁽¹⁾ di seconda specie $\left\{ \begin{smallmatrix} ij \\ k \end{smallmatrix} \right\}$, che per semplicità di scrittura rappresenteremo con α_{ijk} ; e bisogna ricordare che

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u} &= E\alpha_{111} + F\alpha_{112} \quad , \quad \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} = F\alpha_{121} + G\alpha_{122} \quad , \\ \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} &= E\alpha_{121} + F\alpha_{122} \quad , \quad \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial v} = F\alpha_{221} + G\alpha_{222} \quad , \\ \frac{\partial F}{\partial u} &= E\alpha_{121} + F(\alpha_{111} + \alpha_{122}) + G\alpha_{112} \quad , \\ \frac{\partial F}{\partial v} &= E\alpha_{221} + F(\alpha_{121} + \alpha_{222}) + G\alpha_{122} \quad . \end{aligned}$$

Sostituendo questi valori nelle (3), e ponendo, per poco,

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \alpha_{111} \varphi + \alpha_{121} \psi \quad , \quad \psi_1 = \frac{\partial \psi}{\partial u} + \alpha_{112} \varphi + \alpha_{122} \psi \quad , \\ \varphi_2 &= \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \alpha_{121} \varphi + \alpha_{221} \psi \quad , \quad \psi_2 = \frac{\partial \psi}{\partial v} + \alpha_{122} \varphi + \alpha_{222} \psi \quad , \end{aligned}$$

si trova

$$\begin{aligned} E\varphi_1 + F\psi_1 &= 0 \quad , \quad F\varphi_2 + G\psi_2 = 0 \quad , \\ E\varphi_2 + F(\varphi_1 + \psi_2) + G\psi_1 &= 0 \quad ; \end{aligned}$$

poi da queste, osservando che $EG - F^2 > 0$, è facile dedurre

$$\varphi_1/F = \varphi_2/G = -\psi_1/E = -\psi_2/F \quad ,$$

sicchè si è condotti a porre

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \alpha_{111} \varphi + \alpha_{121} \psi = \frac{F\chi}{\sqrt{EG - F^2}} \quad , \quad \frac{\partial \psi}{\partial u} + \alpha_{112} \varphi + \alpha_{122} \psi = -\frac{E\chi}{\sqrt{EG - F^2}} \quad . \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \alpha_{121} \varphi + \alpha_{221} \psi = \frac{G\chi}{\sqrt{EG - F^2}} \quad , \quad \frac{\partial \psi}{\partial v} + \alpha_{122} \varphi + \alpha_{222} \psi = -\frac{F\chi}{\sqrt{EG - F^2}} \quad . \end{cases}$$

(1) Bianchi, *Geometria differenziale*, pag. 66.

Ora basta applicare alla coppia di sinistra, come a quella di destra, la nota condizione d'integrabilità $\partial^2/\partial u \partial v = \partial^2/\partial v \partial u$, per trovare le relazioni

$$\begin{aligned} F \left(\frac{\partial \chi}{\partial v} + K \varphi \sqrt{EG - F^2} \right) - G \left(\frac{\partial \chi}{\partial u} - K \psi \sqrt{EG - F^2} \right) &= 0, \\ E \left(\frac{\partial \chi}{\partial v} + K \varphi \sqrt{EG - F^2} \right) - F \left(\frac{\partial \chi}{\partial u} - K \psi \sqrt{EG - F^2} \right) &= 0, \end{aligned}$$

necessarie e sufficienti affinchè esistano le funzioni φ e ψ , soddisfacenti alle (4). Ne segue, per $K \leq 0$, poichè $EG - F^2 > 0$,

$$(5) \quad \varphi = - \frac{\partial \chi / \partial v}{K \sqrt{EG - F^2}}, \quad \psi = \frac{\partial \chi / \partial u}{K \sqrt{EG - F^2}}.$$

Occorre poi, e basta, per l'esistenza di χ , che si abbia

$$\frac{\partial}{\partial u} (\varphi \sqrt{EG - F^2}) + \frac{\partial}{\partial v} (\psi \sqrt{EG - F^2}) = 0,$$

ossia

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial v} + (\alpha_{111} + \alpha_{122}) \varphi + (\alpha_{121} + \alpha_{222}) \psi = 0,$$

condizione sempre soddisfatta, in virtù delle (4). Sostituendo in queste i valori (5), e richiamando le varie espressioni (1) di K in funzione dei simboli α , si riconosce che la funzione χ deve soddisfare alle equazioni differenziali

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \chi}{\partial u^2} - \left(\alpha_{111} \frac{\partial \chi}{\partial u} + \alpha_{112} \frac{\partial \chi}{\partial v} \right) + EK\chi = 0, \\ \frac{\partial^2 \chi}{\partial u \partial v} - \left(\alpha_{121} \frac{\partial \chi}{\partial u} + \alpha_{122} \frac{\partial \chi}{\partial v} \right) + FK\chi = 0, \\ \frac{\partial^2 \chi}{\partial v^2} - \left(\alpha_{221} \frac{\partial \chi}{\partial u} + \alpha_{222} \frac{\partial \chi}{\partial v} \right) + GK\chi = 0, \end{cases}$$

sicchè $\Delta^2 \chi + 2K\chi = 0$. Trovata una tal funzione, le (5) faranno poi conoscere φ e ψ .

Le considerazioni precedenti ricevono una facile ed interessante applicazione nella Geometria non-euclidea, quando si adotta (a prescindere da un fattore costante) il sistema di coordinate adoperato da Beltrami nel suo celebre *Saggio* (2), per far sì che le rette siano rappresentate da equazioni

(1) Bianchi, l. cit., pag. 51.

(2) *Opere matematiche*, t. I, pag. 377.

lineari. Per

$$E = \frac{R^2(R^2 - v^2)}{(R^2 - u^2 - v^2)^2}, \quad F = \frac{R^2 uv}{(R^2 - u^2 - v^2)^2}, \quad G = \frac{R^2(R^2 - u^2)}{(R^2 - u^2 - v^2)^2},$$

si ha

$$\alpha_{111} = 2\alpha_{122} = \frac{2u}{R^2 - u^2 - v^2}, \quad \alpha_{222} = 2\alpha_{121} = \frac{2v}{R^2 - u^2 - v^2}, \quad \alpha_{112} = \alpha_{221} = 0,$$

$$1/\sqrt{EG - F^2} = \left(\frac{R}{1/\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} \right)^3, \quad K = -\frac{1}{R^2};$$

e le (6) diventano

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} (\chi \sqrt{R^2 - u^2 - v^2}) = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial v^2} (\chi \sqrt{R^2 - u^2 - v^2}) = 0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} (\chi \sqrt{R^2 - u^2 - v^2}) = 0,$$

d'onde risulta

$$\chi = \frac{R(x + \lambda u + \mu v)}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}},$$

con x, λ, μ indipendenti da u, v . Ora dalle (5) si ha

$$\varphi = (x + \lambda u)v + \mu(R^2 - u^2), \quad -\psi = (x + \mu v)u + \lambda(R^2 - v^2).$$

Ciò premesso, si regoli lo spostamento del reticolo delle linee coordinate mediante una linea segnata ad arbitrio nel piano, obbligando l'origine $M(u=0, v=0)$ a percorrere la linea stessa, dirigendo tangenzialmente a questa l'asse delle u , ed assumendo come parametro t l'arco s percorso da M . Per una variazione infinitesima di s dovrà risultare $\delta v = 0$, e la espressione (1) dovrà rappresentare, in M , il quadrato ds^2 dell'arco elementare, sicchè, essendo $E=1$, sarà $\delta u = ds$. D'altra parte in M si ha $\varphi = \mu R^2$, $\psi = -\lambda R^2$, e per conseguenza

$$\frac{\delta u}{ds} = -\mu R^2, \quad \frac{\delta v}{ds} = \lambda R^2;$$

quindi $\lambda = 0$, $\mu = -1/R^2$. Dopo ciò le (2) si riducono alla forma

$$(7) \quad \frac{du}{ds} = xv - 1 + \frac{u^2}{R^2}, \quad \frac{dv}{ds} = -xu + \frac{uv}{R^2}.$$

Son queste, in Geometria iperbolica, le *condizioni necessarie e sufficienti per l'immobilità del punto* (u, v) . Basta cambiare R^2 in $-R^2$ per ottenere le analoghe condizioni in Geometria ellittica.

Rimane da trovare il significato geometrico di x . Affinchè (M) sia una *retta* occorre e basta che, quando M si sposta, l'asse delle u resti immobile, e per conseguenza che l'equazione ottenuta derivando $v=0$, ossia $xu=0$,

sia soddisfatta per qualunque u . Dunque $\kappa = 0$. Al medesimo risultato si perviene esprimendo che la distanza della retta (M) da qualsiasi punto del piano deve, quando M si sposta, rimanere inalterata. Qui conviene richiamare la formola (1) che dà la distanza r fra due punti qualunque (u_0, v_0) ed (u, v) :

$$(8) \quad \text{ch } \frac{r}{R} = \frac{R^2 - uu_0 - vv_0}{\sqrt{(R^2 - u^2 - v^2)(R^2 - u_0^2 - v_0^2)}}.$$

Basta porre $u_0 = u, v_0 = 0$, per trovare che la distanza del punto (u, v) all'asse delle u si calcola mediante la formola

$$(9) \quad \text{th } \frac{r}{R} = \frac{v}{\sqrt{R^2 - u^2}},$$

dalla quale, per le (7), si deduce

$$\frac{dr}{ds} = - \frac{\kappa R u}{\sqrt{R^2 - u^2}},$$

sicchè, dovendo u rimanere arbitraria, si ritrova $\kappa = 0$ come condizione necessaria e sufficiente per l'invariabilità di r , ossia perchè (M) sia una retta. Se poi non è $\kappa = 0$, si può sempre trovare sull'asse delle v un punto C (centro di curvatura, reale o ideale), che si sposta tangenzialmente all'asse. Una delle sue coordinate è $u = 0$; l'altra si ottiene scrivendo $\delta u = 0$, ossia, per la prima delle (7), $v = 1/\kappa$. Si può dunque esprimere κ in funzione del raggio di curvatura $\rho = MC$, sostituendo le coordinate di C nella formola (9):

$$(10) \quad \kappa = 1/R \text{ th } \frac{\rho}{R}.$$

Nel piano euclideo ($R = \infty$) questa espressione si riduce ad $1/\rho$, ed è perciò naturale assumerla come misura della curvatura, anche per le osservazioni già fatte e per altre che faremo fra breve. Per ora si noti soltanto che κ è bensì suscettibile di qualsiasi valore reale, ma il centro di curvatura non è reale se non per $|\kappa| \geq 1/R$. I punti nei quali il raggio di curvatura è infinito ($\kappa = \pm 1/R$) non sono perciò da confondere, nel piano di Lobatschewsky, con quelli d'*inflessione* ($\kappa = 0$), intorno ai quali la linea considerata si comporta come una retta. La prima specie di punti non esiste nel piano di Riemann, e nel piano euclideo essa non apparisce perchè si confonde con l'altra.

(1) Beltrami, l. cit., pag. 405.

Dalle (7) si passa agevolmente alle analoghe condizioni, relative a qualunque altro sistema di coordinate curvilinee. Se si vuol fare uso di coordinate polari, si noti che la distanza r di M da un punto (u, v) è data, in virtù di (8), dalla formola $R \operatorname{th} \frac{r}{R} = \sqrt{u^2 + v^2}$, sicchè si è condotti a porre

$$(11) \quad u = R \operatorname{th} \frac{r}{R} \cdot \cos \theta, \quad v = R \operatorname{th} \frac{r}{R} \cdot \sin \theta;$$

ed è facile constatare che θ rappresenta appunto l'altra coordinata, cioè la inclinazione del raggio vettore sull'asse delle u . Le (7) si trasformano nelle seguenti relazioni

$$(12) \quad \frac{dr}{ds} = -\cos \theta, \quad \frac{d\theta}{ds} = -\kappa + \frac{\sin \theta}{R \operatorname{th} \frac{r}{R}},$$

necessarie e sufficienti per l'immobilità del punto (r, θ) . In particolare, se (M) è una circonferenza ($r = a$), la prima condizione dà $\theta = \frac{1}{2}\pi$, vale a dire che nel centro (reale o ideale) concorrono tutte le normali; poi dalla seconda condizione si deduce, ricordando la (10), $\varrho = a$. Una circonferenza è dunque caratterizzata da un'equazione della forma $\kappa = \text{costante}$. Se la costante è $\pm 1/R$ si ha un *orisciclo*, o circolo di raggio infinito, che non si può confondere con la retta, per la quale si ha invece $\kappa = 0$, come si è visto, e non $\varrho = \infty$. Se la costante ha un valore assoluto minore di $1/R$, la circonferenza è priva di centro reale. Qui apparisce la convenienza di sostituire κ a ϱ nella rappresentazione intrinseca delle curve, affinchè l'equazione conservi la forma reale anche in vicinanza dei punti d'inflessione.

Ora, per trovare la relazione fra un arco infinitesimo di circonferenza e l'angolo al centro, poniamo il polo nel centro e dirigiamo l'asse polare secondo uno dei lati dell'angolo. Così un estremo dell'arco ha le coordinate $u = R \operatorname{th} \frac{r}{R}$, $v = 0$; e gli incrementi di queste, quando si va nell'altro estremo, si possono calcolare mediante le (11), supponendo $\theta = 0$, $\delta r = 0$, dimodochè $\delta u = 0$, $\delta v = R \operatorname{th} \frac{r}{R} \cdot \delta \theta$; poi, ricordando l'espressione (1) di ds^2 ,

$$ds = \sqrt{G} \cdot \delta v = \frac{R \delta v}{\sqrt{R^2 - u^2}} = R \operatorname{sh} \frac{r}{R} \cdot \delta \theta.$$

In particolare l'angolo di due *normali* infinitamente vicine è $\eta = ds/R \operatorname{sh} \frac{\varrho}{R}$.

Per trovare l'angolo ε di due *tangenti* infinitamente vicine si deve prima di tutto osservare che, in virtù d'un noto ⁽¹⁾ teorema, l'area compresa fra le quattro rette predette è $(\varepsilon - \eta) R^2$. D'altra parte l'area stessa è misurata dall'integrale

$$\eta \int_0^{\varrho} R \operatorname{sh} \frac{r}{R} \cdot dr = \eta R^2 \left(\operatorname{ch} \frac{\varrho}{R} - 1 \right).$$

(1) Lobatschewsky, *Giornale di Battaglini*, 1867, p. 310.

Ne segue $\varepsilon = \eta \operatorname{ch} \frac{\varrho}{R} = ds/R \operatorname{th} \frac{\varrho}{R} = \kappa ds$. Dunque la curvatura κ rappresenta, come in Geometria euclidea, il rapporto di ε a ds .

Evidentemente la curvatura della linea (C), *sviluppata* di (M), è $\kappa_1 = \eta/ds_1$; e d'altra parte si ha $ds_1 = d\varrho$. Ne risulta, per la determinazione della sviluppata, la coppia di eguaglianze

$$(13) \quad s_1 = \varrho, \quad \operatorname{th} \frac{\varrho_1}{R} = \operatorname{sh} \frac{\varrho}{R} \cdot \frac{d\varrho}{ds}.$$

Così, per esempio, se si prende $\varrho_1 = a$, si vede che l'equazione intrinseca d'una *sviluppante di circolo* è

$$\operatorname{sh}^2 \frac{\varrho}{2R} = \frac{s}{2R} \operatorname{th} \frac{a}{R};$$

ed in particolare, per $a = \infty$, se si sposta convenientemente l'origine degli archi, si trova che la *sviluppante dell'orisciclo* è rappresentata dall'equazione

$$\varrho = R \log \frac{s + \sqrt{s^2 - R^2}}{R}.$$

Altro esempio. Mediante le (12) si trova facilmente l'equazione d'una *spirale logaritmica*:

$$\operatorname{th} \frac{\varrho}{R} = \sqrt{1 + m^2} \operatorname{th} \frac{ms}{R \sqrt{1 + m^2}}.$$

L'applicazione delle (13) conduce all'equazione della sviluppata

$$(14) \quad \operatorname{th} \frac{\varrho}{R} = \frac{m}{1 + m^2} \left(1 + m^2 \operatorname{ch}^2 \frac{s}{R} \right) \operatorname{sh} \frac{s}{R},$$

ben diversa da quella della sviluppante. Solo nel piano euclideo le due equazioni coincidono nell'unica $\varrho = ms$. Ed è questo un fatto generale, che cioè le varie proprietà d'una curva euclidea si trovano per così dire distribuite fra curve differenti nel piano non-euclideo. Così, per esempio, se calcoliamo la sottotangente polare p , e la sottonormale polare q , mediante le formole

$$\operatorname{th} \frac{p}{R} = \operatorname{th} \frac{p}{R} \cdot \cos \theta = \operatorname{th} \frac{q}{R} \cdot \operatorname{sen} \theta,$$

troviamo bensì $q = \varrho$, per la spirale logaritmica, come nel piano euclideo, ma non $p = -s$. Evidentemente la seconda proprietà deve appartenere alla

svilupmata della spirale; ed infatti dalla relazione

$$\operatorname{th} \frac{r}{R} + \operatorname{th} \frac{s}{R} \cdot \cos \theta = 0,$$

ossia $dr / \operatorname{th} \frac{r}{R} = ds / \operatorname{th} \frac{s}{R}$, si deduce, integrando,

$$\operatorname{sh} \frac{r}{R} = m \operatorname{sh} \frac{s}{R}, \text{ poi } \cot \theta = - \frac{m}{\sqrt{1-m^2}} \operatorname{ch} \frac{s}{R};$$

quindi, per la seconda condizione (12), si giunge all'equazione

$$\operatorname{th} \frac{\varrho}{R} = \frac{m}{\sqrt{1-m^2}} \left(1 + m^2 \operatorname{sh}^2 \frac{s}{R} \right) \operatorname{sh} \frac{s}{R},$$

che non differisce dalla (14), come subito si riconosce cambiando m in $m/\sqrt{1+m^2}$.

Segnaliamo, per finire, l'applicazione che delle (7) si può fare allo studio di qualunque doppio sistema ortogonale di curve. Posta l'origine in un punto qualunque M , si dirigano gli assi secondo le tangenti alle due curve del sistema, incrociandosi in M , e si distingua con l'indice 1 o 2 tutto ciò che si riferisce alla curva tangente all'asse delle u , o all'asse delle v , rispettivamente. Le (7), applicate alle due curve, prendono la forma

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial s_1} = x_1 v - 1 + \frac{u^2}{R^2}, & \frac{\partial v}{\partial s_1} = -x_1 u + \frac{uv}{R^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial s_2} = x_2 v + \frac{uv}{R^2}, & \frac{\partial v}{\partial s_2} = -x_2 u - 1 + \frac{v^2}{R^2}. \end{cases}$$

Affinchè esista una funzione, della quale sian dati i quozienti differenziali $\partial/\partial s_1$ e $\partial/\partial s_2$, è necessario e sufficiente che da tali quozienti sia soddisfatta una certa relazione

$$\frac{\partial^2}{\partial s_1 \partial s_2} - \frac{\partial^2}{\partial s_2 \partial s_1} = k_1 \frac{\partial}{\partial s_1} + k_2 \frac{\partial}{\partial s_2},$$

con k_1 e k_2 dipendenti unicamente dal doppio sistema che si considera. Basta applicare questa condizione ad una delle funzioni u, v , per trovare $k_1 = x_1$, $k_2 = x_2$, e giungere inoltre alla relazione

$$\frac{\partial x_2}{\partial s_1} - \frac{\partial x_1}{\partial s_2} + x_1^2 + x_2^2 + K = 0,$$

che per $K=0$ si converte nella nota relazione di Lamé ⁽¹⁾, caratteristica del piano euclideo.

(1) *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, pag. 85.

Astronomia. — *Osservazioni della nuova cometa 1904 a.* Nota del Corrispondente E. MILLOSEVICH.

La cometa fu scoperta a Geneva (U. S. A.) dall'astronomo Brooks il 16 aprile.

Il 17 io la trovai e l'osservai fino ad oggi quattro volte al grande rifrattore col micrometro filare ed amplificazione 120.

L'astro è d'aspetto minuto, con nucleo di 9^{ma} a 10^{ma} grandezza e rudimenti di coda.

1904 aprile 17	9 ^h 45 ^m 38 ^s RCR;	α appar. 16 ^h 56 ^m 38 ^s .40 (9 ^a .785);	δ appar. 44°40'37".7 (0.548)
" "	20 10 24 1 " ; "	16 47 58.00 (9 ^a .769);	" 46 33 6.7 (0.341)
" "	25 10 50 56 " ; "	16 31 40.96 (9 ^a .706);	" 49 27 32.5 (9.851)
" "	30 8 19 49 " ; "	16 13 32.03 (9 ^a .845);	" 51 58 37.6 (9.433)

L'astro da lungo tempo passò al perielio, e però va perdendo splendore allontanandosi anche dalla terra. Non è improbabile che un'orbita ellittica a corto periodo sia la reale, ma il saggio di elementi, portoci dall'America, derivato da un intervallo minimo, quantunque assai suggestivo per la sua singolarità, deve essere riguardato come una rozza approssimazione.

Geometria. — *Sulla omologia di due piramidi in un iperspazio.* Nota di LUIGI BERZOLARI, presentata dal Socio C. SEGRE ⁽¹⁾.

Due triangoli di un medesimo piano (e senza vertici comuni) possono essere omologici in un solo modo, oppure in due, o in tre, o in quattro, o in sei modi diversi; invece due tetraedri (non aventi vertici comuni) possono essere omologici o in un sol modo, o in due, o in quattro modi diversi ⁽²⁾.

La domanda:

In quanti modi possono essere omologiche due piramidi di (di $n+1$ vertici) appartenenti ad uno spazio S_n di n dimensioni?

trova risposta in questa Nota, dove, con un semplicissimo ragionamento geometrico, si dimostra (n. I) che se $n > 3$, due tali piramidi, che non abbiano vertici nè spigoli comuni, possono essere omologiche soltanto in un modo.

Il caso qui indicato è senza dubbio quello che offre maggior interesse, ed è l'unico che venga considerato nei lavori di mia cognizione dedicati a

⁽¹⁾ Presentata nella seduta del 24 aprile 1904.

⁽²⁾ Vedasi ad es., anche per citazioni dei lavori precedenti di Rosanes, Schröter, Vályi ed altri, Ed. Hess, *Beiträge zur Theorie der mehrfach perspectiven Dreiecke und Tetraeder*, Math. Ann., Bd. 28 (1886), pag. 167.

triangoli e a tetraedri omologici: nei quali anzi non solo è sottintesa la restrizione (che ho posto in principio) circa la non esistenza di vertici comuni, ma si sottintende addirittura che i due triangoli o tetraedri siano assolutamente distinti, cioè non abbiano in comune neanche lati, o risp. spigoli nè facce. Ove tali restrizioni si lascino cadere, si riconosce facilmente che le due figure possono corrispondersi anche in omologie diverse da quelle indicate nei citati lavori, ed anche in infinite omologie. Il risultato a cui si giunge (n. II e III) discutendo questi casi (per un valor qualunque di n) è che *se le due piramidi, pure avendo tutti i vertici distinti, hanno in comune uno spigolo, o non sono omologiche in nessun modo, o si corrispondono in due diverse omologie; mentre se hanno vertici comuni, possono essere omologiche in uno, o in due, o in tre, o in quattro, o in sei, o in infiniti modi* (che vengono assegnati per ogni caso).

I.

Le due date piramidi $P \equiv A_1 A_2 \dots A_{n+1}$ e $P' \equiv A'_1 A'_2 \dots A'_{n+1}$, senza vertici nè spigoli comuni, si corrispondano in un'omologia Ω di centro O (necessariamente esterno ad ogni spigolo di P e P'), così che siano omologhi A_1 e A'_1 , A_2 e A'_2 , ... Se è possibile (con $n > 3$), sia Ω' un'altra omologia, di centro O' , che trasformi P in P' . Essendo Ω e Ω' distinte, almeno due vertici di P avranno in esse come corrispondenti vertici di P' tra loro diversi.

Non può (qualunque del resto sia n) O' coincidere con O : altrimenti, se A_1 è un vertice di P il cui omologo in Ω' non è A'_1 , ma p. es. A'_2 , sarebbero allineati (con $O \equiv O'$) i punti A_1 , A_2 , A'_1 , A'_2 , cioè coinciderebbero due spigoli di P e P' , contro il supposto.

Dico altresì che in Ω' non possono (per $n > 2$) essere corrispondenti due vertici, come A_1 e A'_1 , che già si corrispondono in Ω . Invero in tal caso O' , al pari di O , starebbe sulla retta $A_1 A'_1$, e, detto A_2 un vertice di P il cui omologo in Ω' non sia A'_2 , ma p. es. A'_3 , poichè nel piano delle tre rette (distinte) OA_1 , OA_2 , OA_3 giacciono già i tre vertici A'_1 , A'_2 , A'_3 di P' , l'omologo di A_3 in Ω' non potrebbe essere che A'_2 . Ad un quarto vertice A_4 non potrà anche in Ω' corrispondere A'_4 , e per $n = 3$ ciò è assurdo. Per $n > 3$, ad A_4 corrisponderà p. es. A'_5 , e allora, per una ragione analoga a quella di poc'anzi, ad A_5 corrisponderà A'_4 : ma questo è assurdo, poichè il piano delle rette $A_2 A'_2$, $A_3 A'_3$ e il piano delle rette $A_4 A'_4$, $A_5 A'_5$, avendo in comune le rette OO' , starebbero in un S_3 , sicchè starebbero in un S_3 i cinque vertici A_1 , A_2 , ..., A_5 di P .

Neanche può avvenire che, essendo in Ω' omologo di A_1 p. es. A'_2 , l'omologo di A_2 non sia A'_1 , ma p. es. A'_3 , e l'omologo di A_3 non sia A'_1 , ma p. es. A'_4 . Tutti questi punti giacerebbero infatti in uno stesso piano (per O e O'), epperò giacerebbero in un piano anche i quattro vertici A_1 , A_2 , A_3 , A_4 di P .

È pure assurdo (per $n > 2$) che a tre vertici A_1, A_2, A_3 di P corrispondano in Ω' risp. i vertici A'_2, A'_3, A'_1 di P' dedotti con una permutazione circolare da quelli che corrispondono ai precedenti in Ω . Infatti, se $n = 3$, ad A_4 dovrebbe anche in Ω' corrispondere A'_4 , il che si è dimostrato già impossibile. Per $n > 3$, in quella ipotesi potrà inoltre accadere che ad una coppia A_4, A_5 corrisponda in Ω' la coppia A'_5, A'_4 , oppure che ad una seconda terna A_4, A_5, A_6 corrisponda in Ω' la terna A'_5, A'_6, A'_4 . Ma nel primo caso le rette $A_1 A'_1, A_2 A'_2, A_3 A'_3$ giacerebbero in un piano, e le rette $A_4 A'_4, A_5 A'_5$ in un altro, e i due piani, avendo in comune la retta OO' , apparterrebbero ad un S_3 , sicchè starebbero in un S_3 i cinque vertici A_1, A_2, \dots, A_5 di P . Nel secondo caso, osservando che dovrebbero appartenere ad un piano le rette $A_4 A'_4, A_5 A'_5, A_6 A'_6$, si giungerebbe analogamente all'assurdo che uno stesso S_3 conterrebbe i vertici A_1, A_2, \dots, A_6 di P .

Resta dunque da considerare il solo caso che n sia dispari, e i vertici di P si distribuiscano in $\frac{n+1}{2}$ coppie, così che ai vertici A_i, A_j di ciascuna coppia corrispondano in Ω' risp. i vertici A'_j, A'_i . Ora per $n > 3$ (epperò > 4) anche questo è da escludere. Infatti se A_1 e A_2, A_3 e A_4, A_5 e A_6 sono tre di quelle coppie, i tre piani determinati dalle coppie di rette $A_1 A'_1$ e $A_2 A'_2, A_3 A'_3$ e $A_4 A'_4, A_5 A'_5$ e $A_6 A'_6$, avendo in comune la retta OO' , giacerebbero in un S_4 , cioè starebbero in un S_4 i sei vertici A_1, A_2, \dots, A_6 di P .

Così il teorema enunciato per primo è dimostrato.

II.

Le due piramidi P e P' , senza vertici comuni, abbiano ora in comune uno spigolo s . Un'omologia che trasformi P in P' deve avere il centro su s , altrimenti i due vertici di P' posti su s e gli altri due vertici di P' omologhi ai due di P situati su s sarebbero in un piano. Perciò una tale omologia (qualunque sia n) non esiste se la congiungente due vertici di P e P' esterni ad s passa per uno dei vertici posti su s . Escluso questo caso, per $n = 2$ le omologie domandate esistono, mentre per $n > 2$ esistono o no secondo che su s trovasi o no un punto O (che necessariamente sarà unico) allineato con le coppie di vertici di P e P' esterni ad s . Anzi nel primo caso, qualsiasi n , ne esisteranno due (potendosi in due modi diversi far corrispondere tra loro i vertici di P, P' giacenti sopra s), entrambe ben determinate; e non ne esisteranno altre.

III.

Passando finalmente all'ipotesi (con n qualunque) di vertici comuni a P e P' , conviene trattare a parte i casi in cui essi siano in numero di $n+1, n$, od $n-1$.

a) Nel primo caso P e P' costituiscono una sola piramide, e questa è trasformata in sè da infinite omologie: quelle che hanno il centro in un vertice e l'iperpiano nella faccia opposta, e quelle che mutano uno dei vertici in un altro, lasciando fissi i vertici rimanenti.

b) Le richieste omologie sono pure in numero infinito allorchè i vertici comuni siano n : basta infatti far corrispondere l'uno all'altro i due vertici non comuni, prendendo come centro un punto qualunque della loro congiungente r , e come iperpiano d'omologia quello dei vertici comuni. — Oltre a queste, si ha un'altra omologia quando r incontri la congiungente due vertici comuni: questi si corrispondono in essa doppiamente, sicchè l'omologia è armonica. — Se invece r contiene uno dei vertici comuni, si hanno altre infinite omologie, sia ponendo il centro in quest'ultimo e prendendo come omologhi i due vertici non comuni, sia ponendo il centro in un altro punto qualunque di r e facendo corrispondere a quel vertice comune, nell'omologia e nella sua inversa, i due vertici non comuni, e, in entrambi i casi, conducendo l'iperpiano d'omologia per i rimanenti vertici comuni.

c) Se P e P' , essendo omologiche, hanno $n - 1$ vertici comuni, i vertici A_1, A_2 di P non comuni a P' non possono avere entrambi come omologhi vertici comuni: altrimenti le congiungenti queste due coppie di punti omologhi, passando per il centro di omologia, sarebbero in un piano, il quale conterrebbe quindi quattro vertici di P . — Aggiungasi che i quattro vertici non comuni debbono stare in un piano. Ciò è evidente se nell'omologia essi si corrispondono a due a due; ma se anche al solo A_1 corrisponde un vertice non comune A'_1 , mentre ad A_2 corrisponde p. es. $A'_2 \equiv A_3$, detto O il centro (situato sulla retta $A_1 A'_1$), sulla OA_2 starà il punto A'_3 omologo di A_3 , e questo sarà l'altro vertice di P' non comune a P .

Se dunque P e P' sono omologiche, son tali, in generale, in due diverse omologie Ω e Ω' : quelle in cui ai due vertici non comuni A_1, A_2 di P corrispondono i due A'_1, A'_2 (oppure A'_2, A'_1) di P' , essendo iperpiano d'omologia per entrambe quello passante per gli $n - 1$ vertici comuni e per l'intersezione delle rette $A_1 A_2, A'_1 A'_2$ (la quale è certamente esterna all' S_{n-2} dei punti precedenti). — Quando poi (con $n > 2$) la congiungente due vertici comuni A_3, A_4 passi per il centro di Ω o di Ω' , si ha una terza omologia, che ha quello stesso centro, e in cui A_3 e A_4 si corrispondono in doppio modo (sicchè l'omologia è armonica), mentre l'iperpiano d'omologia passa per tutti i restanti vertici comuni (si noti che non possono in tal caso altri due vertici comuni essere allineati col centro della seconda omologia, altrimenti sei vertici di P starebbero in un S_4). E una terza omologia si ha pure nel caso, considerato sopra, in cui un vertice comune sia allineato con due vertici non comuni. — Se invece, nel caso generale (qualsiasi n), il centro di Ω o di Ω' coincide con uno dei vertici comuni, il corrispondente iperpiano d'omologia diviene indeterminato, e le cercate omologie sono infinite.

Fin qui si è implicitamente supposto che tre dei quattro vertici non comuni non siano mai in linea retta. Se tre soli stanno sopra una retta r , P e P' non possono essere omologiche; ma se anche il quarto giace su r , le omologie richieste sono infinite, poichè i vertici comuni devono tutti necessariamente essere uniti e il centro è un punto da scegliersi ad arbitrio su r , dopo di che l'iperpiano d'omologia resta determinato (in due modi).

Rimane ormai soltanto da discutere l'ipotesi che P e P' abbiano in comune k vertici, essendo $1 \leq k < n - 1$, sicchè almeno tre vertici di P non apparterranno a P' e sarà $n \geq 3$. Considerando anzitutto il caso in cui uno dei vertici comuni si possa assumere come centro di omologia, gli altri $k - 1$ saranno uniti, ed i non comuni si corrisponderanno a due a due sopra $n - k + 1$ rette per il centro. L'iperpiano d'omologia, dovendo passare per quei $k - 1$ vertici comuni, e per l' S_{n-k-1} in cui si tagliano i due S_{n-k} individuati dai rimanenti vertici di P e dai rimanenti di P' , è indeterminato. Queste omologie sono dunque in numero infinito, e all'infuori di esse non ne esistono altre che mutino P in P' .

Escluso questo caso, un'omologia Ω , che trasformi P in P' , o fa corrispondere ad uno dei vertici non comuni uno di quelli comuni, o fa corrispondere tra loro a due a due i vertici non comuni.

Nella prima ipotesi, se al vertice A_1 di P , non appartenente a P' , corrisponde in Ω un vertice comune $A'_1 \equiv A_2$, l'omologo A'_2 di A_2 sta sulla retta $A_1 A_2$ e non è un vertice di P . I rimanenti vertici comuni sono uniti, e i non comuni si corrispondono a due a due, non esistendone più di una coppia sopra una retta uscente dal centro. L'omologia risulta pienamente individuata: ma se ne ha una seconda, che pure muta P in P' , facendo corrispondere A'_2 ad A_1 , assumendo $A'_1 \equiv A_2$ come unito, e mantenendo inalterate tutte le altre precedenti condizioni.

Nella seconda ipotesi, i vertici non comuni (tra loro corrispondenti in Ω) di P e P' sono a due a due allineati col centro O , e i vertici comuni sono tutti uniti, sicchè Ω risulta individuata. Ma se due di questi ultimi sono in linea retta con O , essi possono anche farsi corrispondere tra loro in doppio modo, e si ottiene una seconda omologia (armonica) che muta P in P' . E una seconda omologia si ha pure quando sopra una stessa retta per O giacciono due coppie di vertici non comuni; oppure quando sulla congiungente due vertici non comuni omologhi in Ω stia uno dei vertici comuni (è questo il caso che già si è incontrato esaminando la prima ipotesi). — In questi due ultimi casi particolari non esistono altre omologie atte a cambiare P in P' . Nel caso generale, in cui le coppie $A_1, A'_1; \dots; A_{n-k+1}, A'_{n-k+1}$ di vertici (non comuni) omologhi in Ω sono allineate con O , se si hanno altre di quelle omologie, devono lasciar fisso ciascuno dei vertici comuni, e trasformare la piramide $Q \equiv A_1 A_2 \dots A_{n-k+1}$ nella piramide $Q' \equiv A'_1 A'_2 \dots A'_{n-k+1}$. Ciò esige anzitutto che Q e Q' stiano in un medesimo S_{n-k} : in caso contrario

infatti uno spigolo qualunque di Q taglierebbe i due spigoli, che gli corrispondono in Ω e nell'altra omologia, in uno stesso punto dell' S_{n-k-1} comune ai due S_{n-k} individuati dai vertici di Q e di Q' , sicchè quattro vertici di Q' starebbero in un piano. E poichè Q e Q' non hanno nè vertici nè spigoli comuni, per ciò che si è dimostrato in I dovrà $n - k + 1$ avere uno dei valori 3, 4, cioè sarà $k = n - 2$, oppure $k = n - 3$. Effettivamente possono esistere, oltre ad Ω , nel primo caso una, due, tre, o cinque di quelle omologie (Rosanes, Schroeter), e nel secondo caso una o tre (Vályi). — Neanche qualcuna di queste nuove omologie può aversi nel primo caso particolare sopra considerato, in cui O è in linea retta con due dei vertici comuni a P , P' : invero per $k = n - 2$ si richiede che Q e Q' siano in un piano per O , e per $k = n - 3$ che siano in un S_3 per O , sicchè P avrebbe cinque vertici in un S_3 , o rispettivamente sei vertici in un S_4 .

Matematica. — *Alcuni teoremi di calcolo infinitario.* Nota di ETTORE BORTOLOTTI, presentata dal Socio U. DINI.

Studiando il quesito della determinazione dell'ordine di infinito per funzioni reali dei punti di un insieme numerabile, ho rinvenuto alcuni teoremi, dai quali immediatamente si deducono proprietà importanti di funzioni non necessariamente continue della variabile continua x , e che, nel caso di funzioni continue e derivabili, permettono uno studio più profondo, delle relazioni fra il comportamento assintotico del quoziente di due funzioni e quello delle derivate, di quel che si possa fare coi metodi ordinari.

Scrivo qui gli enunciati di alcuni fra i teoremi che ho ritrovati su questo argomento, la cui dimostrazione è fondata sulle proposizioni contenute nella Memoria *Sui prodotti infiniti e le serie a termini positivi*, che si sta ora stampando nel fascicolo in corso dei Rendiconti del Circolo matematico di Palermo.

1. Indichi $[x_n]$ un insieme numerabile di punti, dati in modo qualunque nel piano della variabile complessa, e siano $f(x_n)$, $\varphi(x_n)$, funzioni reali, finite, ad un valore per ogni valore finito di n . La $\varphi(x_n)$ tenda, per $n = \infty$, all'infinito sempre crescendo, e la $f(x_n)$ sia monotona.

Poniamo

$$\Delta f(x_n) = f(x_{n+1}) - f(x_n), \quad \Delta \varphi(x_n) = \varphi(x_{n+1}) - \varphi(x_n).$$

I. Se il quoziente $\frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)}$ è monotono, per tutti i valori di n maggiori di un determinato numero N , ed è infinito (infinitesimo) per $n = \infty$,

anche il quoziente $\frac{\Delta f(x_n)}{\Delta \varphi(x_n)}$ delle differenze finite, è infinito (infinitesimo) di ordine non minore.

II. Se il quoziente $\frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)}$ è monotono ed ha per $n = \infty$, limite determinato, finito e diverso dallo zero, λ , affermeremo che anche il quoziente delle differenze finite tende allo stesso limite, se sarà monotona la funzione

$$f(x_n) - \lambda \varphi(x_n).$$

III. Se il doppio rapporto $\frac{\Delta f(x_n)}{\Delta \varphi(x_n)} : \frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)}$ per tutti gli $n \geq N$ si mantiene maggiore di un numero maggiore di 1, il quoziente $\frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)}$ è infinito e determinato per $n = \infty$; se invece si mantiene positivo, ma minore di un numero minore di 1, il quoziente delle funzioni è infinitesimo.

IV. Si ponga

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\varphi(x_{n+1})}{\varphi(x_n)} = 1 + a_n \\ \frac{\Delta f(x_n)}{\Delta \varphi(x_n)} : \frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)} = 1 + b_n, \\ \beta_n = \frac{\lg \left(1 + \frac{a_n b_n}{1 + a_n} \right)}{\lg (1 + a_n)} \end{array} \right.$$

Se esiste il limite

$$\beta = \lim_{n=\infty} \beta_n,$$

ed è ϵ un numero positivo dato a piacere, l'ordine di infinito della funzione $f(x_n)$, per $n = \infty$, è minore di quello della variabile $\{\varphi(x_n)\}^{1+\beta+\epsilon}$, maggiore di quello della variabile $\{\varphi(x_n)\}^{1+\beta-\epsilon}$.

Seguendo le idee di Cauchy ⁽¹⁾ potremo anche dire: se si assume come infinito principale quello della variabile $\varphi(x_n)$, l'ordine di infinito della $f(x_n)$ è dato dal numero $1 + \beta$.

V. Se la variabile $\varphi(x_n)$, il cui infinito si assume come principale, soddisfa la relazione:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varphi(x_{n+1})}{\varphi(x_n)} = 1,$$

si ha

$$1 + \beta = \lim_{n=\infty} \frac{\Delta f(x_n)}{\Delta \varphi(x_n)} : \frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)},$$

e cioè l'ordine d'infinito, al senso chiarito superiormente, della $f(x_n)$, si ottiene cercando il limite del doppio rapporto $\frac{\Delta f}{\Delta \varphi} : \frac{f}{\varphi}$.

⁽¹⁾ Œuvres, t. IV della 2ª serie, pag. 281.

VI. Anche se la β_n non ha limite, l'ordine di infinito della $f(\varphi_n)$, relativamente alla $\varphi(x_n)$, è situato fra i limiti superiore ed inferiore di indeterminazione della variabile $1 + \beta_n$.

VII. Se il doppio rapporto $\frac{\Delta f(x_n)}{\Delta \varphi(x_n)} : \frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)}$ è infinito (infinitesimo) per $n = \infty$, l'ordine di infinito della $f(x_n)$ è superiore (inferiore) a quello di qualunque potenza reale positiva della $\varphi(x_n)$.

2. Le proposizioni enunciate si applicano immediatamente a funzioni reali della variabile reale x , e danno le relazioni fra il comportamento assintotico del quoziente di due funzioni e quello delle differenze finite. Tali relazioni non richiedono la continuità delle funzioni che si considerano e sono indipendenti dall'accrescimento finito $h = x_{n+1} - x_n$, della variabile.

3. È facile vedere come esse si modifichino quando si abbia a che fare con funzioni derivabili e si supponga h infinitesimo: enuncierò solo la proposizione seguente che mi pare notevole:

Sieno $f(x)$, $\varphi(x)$ funzioni reali della variabile reale x , finite, ad un valore e derivabili in tutti i punti di un intorno ($x_0 \dots + \infty$).

La $\varphi(x)$ sia ivi sempre crescente ed infinita per $x = +\infty$, la $f(x)$ sia infinita e determinata per $x = +\infty$.

Se il doppio rapporto:

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} : \frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

è positivo nei punti ($x \dots +\infty$) ed ha, per $x = +\infty$, limite determinato λ , sarà λ l'ordine d'infinito (al senso di Cauchy) della $f(x)$ quando per infinito principale si assuma quello delle $\varphi(x)$.

Se quel doppio rapporto ha limiti inferiore e superiore di indeterminazione l , L , l'ordine di infinito (al senso detto superiormente) della $f(x)$ sarà compreso fra l , ed L .

Aggiungeremo che: Se il doppio rapporto $\frac{f'}{\varphi'} : \frac{f}{\varphi}$ è maggiore di 1, in tutti i punti a distanza finita di un intorno ($x_0 \dots +\infty$), il quoziente $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ è sempre crescente, se minore di 1, decrescente.

4. Come applicazione di cotesto teorema si calcolerà l'ordine d'infinito di una data funzione, quando l'infinito principale sia quello della x , cercando il limite del prodotto della x stessa per la derivata logaritmica della funzione data;

quando si assuma come infinito principale quello della e^x , cercando il limite, per $x = \infty$, della derivata logaritmica;

quando per infinito principale si assuma quello della x^x , cercando il limite del quoziente della derivata logaritmica per $\lg x$, ecc.

Geodesia. — *Determinazioni astronomiche di latitudine eseguite a Venezia, Donada e Comacchio nel 1903.* Nota di VINCENZO REINA, presentata dal Corrispondente G. CASTELNUOVO.

In prosecuzione della livellazione astronomica fin dal 1898 iniziata lungo il meridiano di Roma ⁽¹⁾, nell'estate decorsa vennero eseguite tre nuove determinazioni di latitudine nei punti trigonometrici di primo ordine, Venezia, Donada e Comacchio. Non essendo possibile in nessuno dei tre punti fare stazione in centro, e dovendo collocare lo strumento in località depresse, con limitato orizzonte, si dovette rinunciare alle determinazioni di azimut.

Tanto prima della campagna quanto dopo venne esaminato lo strumento (Universale Bamberg) sul pilastro geodetico di S. Pietro in Vincoli, determinandone nuovamente la latitudine. I valori ottenuti risultarono in pieno accordo con quelli precedentemente trovati.

Qui si presenta un breve riassunto dei risultati conseguiti nelle tre nuove stazioni.

Stazione a Venezia. — Il punto trigonometrico di primo ordine era costituito dal campanile di S. Marco, ora distrutto. Dopo una esplorazione nelle isole della laguna, nella quale mi fu di grande aiuto il prof. Giacomo Soave dell'Istituto nautico della città, il pilastro d'osservazione venne costruito nell'isola di S. Elena, in una località dalla quale erano visibili i seguenti punti trigonometrici d'ordine inferiore: S. Nicolò del Lido, S. Lazzaro, Malamocco, S. Clemente, I Frari, Murano (S. Donà). Dal fascicolo dell'Istituto Geogr. Mil., *Elementi geodetici dei punti contenuti nel foglio 51 della Carta d'Italia*, si ricavarono le coordinate geografiche di tali punti, e con esse si calcolarono le loro coordinate cartesiane rispetto ad un sistema di assi avente l'origine a S. Marco, ed avente l'asse delle Y diretto secondo il meridiano, positivamente verso il nord, l'asse delle X diretto positivamente verso est.

Cogli angoli misurati nel punto di stazione, applicando il procedimento di Snellius, si poterono calcolare in due modi fra loro indipendenti le coordinate del punto stesso ottenendo

$$\begin{array}{ll} X = 2028.45^m & Y = -1011.87^m \\ X = 2028.39 & Y = -1011.78. \end{array}$$

⁽¹⁾ *Determinazioni astronomiche di latitudine e di azimut eseguite lungo il meridiano di Roma.* Pubbl. della R. Comm. Geod. Ital., Firenze 1903.

Si ritengono quindi i valori medi

$$X = 2028^m.42 \quad Y = -1011^m.83.$$

Nel periodo dal 27 agosto al 1° settembre, con cielo perfettamente sereno, si osservarono i passaggi meridiani di 60 stelle divise in 6 gruppi di 10 stelle ciascuno. Circa la formazione di questi gruppi ed i procedimenti di osservazione e di calcolo, si seguirono strettamente le norme fissate nella su citata pubblicazione. Alle declinazioni delle stelle si applicarono le *correzioni provvisorie* di Auwers. I valori ottenuti per la latitudine sono riassunti nel seguente specchio:

Gruppi	Posizioni del cerchio						Medie	Numero delle osservazioni
	0°	45°	90°	135°	180°	270°		
	45° 25'							
I	26.72 ⁽¹⁾	25.45	24.37	25.59	24.96 ⁽¹⁾	25.43 ⁽²⁾	45.25.25.39	55
II	26.60	25.23	25.78	24.78	26.04	24.62	25.51	60
III	26.14	26.01	25.41	24.59	25.01	25.28	25.41	60
IV	26.27	25.75	26.01	25.48	25.42 ⁽²⁾	26.52	25.92	59
V	26.97 ⁽²⁾	26.55	25.67 ⁽²⁾	25.76	26.17	26.64	26.29	58
VI	26.67 ⁽²⁾	26.03	26.27 ⁽¹⁾	25.70	26.65 ⁽²⁾	26.15	26.23	56
Medie. .	26.54	25.84	25.56	25.32	25.72	25.78	45.25.25.79	348

Nel fare le medie registrate nella penultima colonna (latitudini corrispondenti ai singoli gruppi di stelle) e nell'ultima riga (latitudini corrispondenti alle diverse posizioni del Cerchio), si è attribuito ai valori dello specchio il peso 10 tranne a quelli segnati con (1) e con (2) ai quali si sono fatti corrispondere i pesi 8 e 9 rispettivamente, come provenienti da gruppi incompleti.

Applicando al risultato finale

$$\varphi = 45^{\circ}.25'.25''.79$$

la riduzione in centro

$$\Delta\varphi = -\frac{Y}{R \text{ arc } 1''} = +32''.78$$

si ottiene per la latitudine astronomica di S. Marco, come risultante da 348 osservazioni meridiane di 60 stelle

$$\varphi = 45^{\circ}.25'.58''.57 \quad m = 0''.11. \\ (\text{Epoca } 1903.66)$$

La latitudine determinata dal Barone di Zach nel 1807 con un circolo ripetitore e con distanze circummeridiane di Sole era risultata

$$\varphi = 45^{\circ}.25'.59''.17. \quad (1807)$$

Desiderando confrontare il mio valore con quello determinato dal prof. Millosevich negli anni 1877-78 con osservazioni di stelle in primo verticale ed in meridiano ⁽¹⁾, nel dicembre 1903 ritornai a Venezia, e salito sulla tettoia che, nell'Osservatorio dell'Istituto di Marina mercantile, ricopre lo strumento di Reichenbach e Utzschneider del quale si era servito il predetto professore, misurai gli angoli fra le visuali che vanno ai punti trigonometrici S. Lazzaro, S. Clemente, I Frari, S. Geremia. Applicando il procedimento di Snellius con una equazione di controllo, si ottennero rispetto a S. Marco le coordinate cartesiane

$$X = 371^m.1 \qquad Y = 403^m.7$$

e quindi la riduzione in centro

$$\Delta\varphi = -13''.08$$

la quale applicata al valore del prof. Millosevich

$$\varphi = 45^{\circ}.26'.10''.50$$

conduce alla latitudine di S. Marco

$$\varphi = 45^{\circ}.25'.57''.42. \quad (1877-78)$$

Un ulteriore confronto mi fu reso possibile da una comunicazione scritta del comandante Cattolica, il quale applicando il metodo di Horrebow-Talcott con un telescopio zenitale a nove coppie di stelle, ottenne nel luglio 1903 25 valori della latitudine dell'Osservatorio della R. Marina nell'Arsenale di Venezia. Applicando alla media di questi valori

$$\varphi = 45^{\circ}.26'.11''.01$$

la riduzione

$$\Delta\varphi = -12''.61$$

si ottiene per la latitudine di S. Marco

$$\varphi = 45^{\circ}.25'.58''.40. \quad (1903.5)$$

Stazione a Donada. — Non essendo possibile fare stazione sul centro trigonometrico (campanile della chiesa parrocchiale) si eresse il pilastro d'os-

⁽¹⁾ *Determinazione della latitudine dell'Osservatorio dell'Istituto di Marina mercantile in Venezia*, ecc. Atti del R. Istituto Veneto, vol. IV e V, Serie V.

servazione ad un estremo della piazza, facendone il collegamento al centro in due modi indipendenti, a mezzo di due basi misurate sulla piazza stessa. Le coordinate polari del punto di stazione rispetto al centro risultarono

$$s = 109^m.835 \quad \alpha = 262^\circ.48'.57''.$$

Le osservazioni, favorite da tempo bellissimo, furono compiute nelle quattro notti dal 4 al 7 settembre. I risultati ottenuti sono riassunti nel seguente specchio:

Gruppi	Posizioni del cerchio				Medie	Numero delle osservazioni
	0°	45°	90°	135°		
	45°.02'					
I.	5.31	6.78	5.91	5.17	45.02.05.79	40
II.	5.64	5.77	5.90	5.03	5.58	40
III.	6.23	6.63	5.05	4.99	5.72	40
IV.	5.44	6.07	5.43	5.86	5.70	40
V.	5.32	5.99	5.10 ⁽¹⁾	5.48	5.48	39
VI.	5.35 ⁽¹⁾	5.85 ⁽²⁾	5.09 ⁽²⁾	4.93	5.29	35
Medie . . .	5.56	6.15	5.42	5.29	45.02.05.60	234

Se alla latitudine media del punto di stazione si applica la riduzione in centro

$$\Delta\varphi = -\frac{s \cos \alpha}{\text{Rarc } 1''} = + 0''.44$$

si trova per la latitudine di Donada (centro), risultante da 234 osservazioni meridiane di 60 stelle

$$\varphi = 45^\circ.02'.06''.04 \quad m = 0''.12.$$

(Epoca 1903.68)

Stazione a Comacchio. — Le operazioni caddero in un periodo piovoso e temporalesco, nel quale grandi innondazioni devastarono il Veneto. Iniziate il 10, esse si chiusero il 20 settembre, ma dovettero effettuarsi in modo saltuario, senza che si potesse seguire il programma prestabilito. Anche qui, non essendovi modo di far stazione sul centro trigonometrico, (campanile della cattedrale) si eresse il pilastro su una prateria fuori della città in guisa da potersi misurare due basi spiccantisi dallo stesso punto d'osservazione. A mezzo di due triangoli appoggiati a queste basi ed aventi un vertice sul centro, si poterono determinare in due modi indipendenti le coordinate polari

(1) Peso 7.

(2) Peso 9.

del punto di stazione rispetto al centro. Esse risultarono

$$s = 224^m.393 \quad \alpha = 224^\circ.54'.20''.$$

I risultati ottenuti sono riassunti nel seguente specchio:

Gruppi	Posizioni del cerchio				Medie	Numero delle osservazioni
	0°	45°	90°	135°		
	44° 41'					
I.	27.89 ⁽³⁾	27.67	...	44° 41'.27.77	19
II.	26.80 ⁽³⁾	26.94	...	26.87	19
III.	28.03 ⁽²⁾	27.10	27.37 ⁽²⁾	...	27.45	27
IV.	27.03	28.76	28.19 ⁽²⁾	27.02	27.73	38
V.	27.57	27.44	27.50	20
VI.	29.21 ⁽³⁾	27.77 ⁽²⁾	28.43 ⁽²⁾	28.01	28.36	35
VII.	27.74	26.85 ⁽¹⁾	27.98	27.97	27.70	37
VIII.	27.73 ⁽²⁾	27.73	8
Medie. ...	27.88	27.56	27.73	27.63	44.41.27.70	203

Se alla latitudine media della stazione, registrata in fondo alla penultima colonna, si applica la riduzione in centro

$$\Delta\varphi = + 5''.15$$

si ottiene per la stazione di Comacchio (centro), risultante da 203 osservazioni meridiane di 80 stelle

$$\varphi = 44^\circ.41'.32''.85 \quad m = 0''.13.$$

(Epoca 1903.70)

Le attrazioni locali. — Nel quadro seguente sono riassunte, desumendole dalla pubblicazione già citata, le latitudini astronomiche delle varie stazioni eseguite lungo il meridiano di Roma, procedendo da sud verso nord. Tali latitudini vennero anche ridotte alla posizione media del Polo in corrispondenza a tutte le epoche per le quali si posseggono gli elementi di riduzione. Le latitudini geodetiche vennero fornite dall'Istituto Geografico Militare, derivandole da quella determinata a M. Mario dal prof. Respighi, latitudine che, come risulta dal quadro stesso, è di 1''.85 inferiore alla mia. Per meglio vedere l'andamento delle attrazioni locali si aggiungono anche le latitudini dei due Osservatori di Bologna e di Padova, i quali non cadono molto discosti dal meridiano qui considerato.

(1) Peso 7.

(2) Peso 8.

(3) Peso 9.

Stazione	Epoca	Latitudine astronomica φ_a		Latitudine geodetica φ_g	$\varphi_a - \varphi_g$	Osservazioni
		osservata	ridotta al Polo medio			
M. Pisarello . . .	1899.5	41.28.36.03	36.13	36.44	— 0.31	
M. Cavo.	1898.5	45.03.42	3.55	2.32	+ 1.23	
Fiumicino.	1898.6	46.14.59	14.67	13.08	+ 1.59	
S. Pietro in Vincoli	1900.85	53.35.37	35.39	33.60	+ 1.79	
M. Mario	1898.3	55.26.25	26.44	24.59	+ 1.85	
M. Soratte	1900.5	42.14.46.38	46.43	40.96	+ 5.47	
M. Cimino	1901.5	24.31.09	31.00	24.96	+ 6.04	
M. Peglia.	1901.6	49.09.36	9.28	2.93	+ 6.35	
Alta S. Egidio. .	1902.6	43.18.47.30	47.16	37.97	+ 9.19	
M. Carpegna . . .	1902.6	48.23.21	23.07	4.92	+ 18.15	
Bertinoro	1902.7	44.08.45.77	45.65	28.90	+ 16.75	
Bologna.	1897.5	29.52.77	. . .	46.11	+ 6.66	Determ. del prof. Ciscato (1)
Comacchio	1903.7	41.32.85	. . .	42.18	— 9.33	
Donada	1903.7	45.02.06.04	. . .	13.07	— 7.13	
Padova	1892-93	24.01.01	. . .	5.35	— 4.34	Determ. del prof. Ciscato (2)
Venezia	1903.7	25.58.57	. . .	0.89	— 2.32	

Da questo quadro emerge un fatto del tutto inatteso, cioè la enorme deviazione in latitudine di 26" fra le due stazioni di Bertinoro e di Comacchio, i cui paralleli distano appena di 33'.13" ossia di 61 $\frac{1}{2}$ km. Questa deviazione fa in certo modo riscontro a quella scoperta da Beccaria e riconfermata da Carlini (48") fra Andrate e Mondovì, nella parte occidentale della valle Padana.

Il filo a piombo che a Bertinoro è deviato verso sud, in parte per l'attrazione dell'Appennino, ma probabilmente più, come risulta dall'esame dello stesso quadro precedente, per effetto di anomalie nella densità terrestre, appare invece fortemente deviato verso nord in una regione affatto piana, quale è quella in cui giace Comacchio, lontana da masse emergenti perturbatrici. Gli eccessi di massa sotterranea rivelati nella valle del Po dalle determinazioni di gravità relativa eseguite dal colonnello von Sterneek (3) e dal luogotenente von Triulzi (4), valgono forse a giustificare, se non a spiegare tale deviazione.

Proseguendo ancora al nord lungo il meridiano, è mia intenzione eseguire nell'estate prossima le due stazioni di Oderzo e di Monte Cavallo (2251 m.), penetrando così nella sfera d'influenza delle Alpi.

(1) Pubbl. della R. Comm. Geod. Ital., Venezia 1899.

(2) Mem. del R. Istituto Veneto, Venezia 1894; Pubbl. della R. Comm. Geod. Ital., Venezia 1894.

(3) Mittheilungen des k. u. k. Militär-Geographischen Institutes. Bd. XI.

(4) *Relative Schwerebestimmungen etc.* herausg. v. k. u. k. Reichs-Kriegs-Ministerium, Wien 1895.

Fisica matematica. — *Sulla teoria matematica della circolazione atmosferica.* Nota di LUIGI DE-MARCHI, presentata dal Corrispondente G. RICCI⁽¹⁾.

1. Siano

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial x} + h A_2 u + 2\varepsilon v &= 0 \\ \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial y} + h A_2 v - 2\varepsilon u &= 0 \\ \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial z} - h A_2 w &= 0 \end{aligned}$$

le equazioni di moto di un fluido con attrito, riferito a un sistema di assi rotante con velocità angolare ε intorno all'asse delle z , e in cui possano ritenersi trascurabili le accelerazioni, condizione che si verifica con grande approssimazione nei movimenti più generali dell'atmosfera.

La \mathfrak{T} è definita dalla differenza $V - \Pi$ fra il potenziale d'attrazione e il potenziale di pressione $\int \frac{dp}{\mu}$ (ove μ sia la densità) quando la p possa considerarsi come funzione della sola μ ; oppure, con opportune trasformazioni di Oberbeck⁽²⁾, può esprimersi col trinomio

$$b^2 \tau - c^2 \nu + h \theta$$

ove b^2 , c^2 possono considerarsi, entro lo strato atmosferico, come costanti; τ è l'anomalia di temperatura definita da

$$\tau = T - T_r$$

dove T_r è funzione del solo raggio vettore r ; ν è l'anomalia relativa di pressione definita da

$$p = p_1(1 + \nu)$$

ed esprimente quei cambiamenti di pressione che sono dovuti al movimento; h è il coefficiente d'attrito interno riferito all'unità di massa; θ è la dilatazione cubica.

Dividendo le (1) per $\varrho = \sqrt{(x - x_a)^2 + (y - y_a)^2 + (z - z_a)^2}$, distanza di un punto, in cui si vuol determinare il moto, da un elemento generico della massa atmosferica, e integrando su tutta la massa stessa, si viene pel

(1) Presentata nella seduta del 24 aprile 1904.

(2) *Bewegungs-erschein. d. Atmosph.* I. Sitzungsber. Berlin, 1888, I: Halbb.

teorema di Green ⁽¹⁾ a isolare le u, v, w espresse come una somma di potenziali e derivati di potenziali. Ogni termine di questa somma esprime una componente di velocità dovuta a un particolare elemento fisico o dinamico.

2. La componente indotta dalla rotazione terrestre è espressa dalle componenti secondo gli assi

$$(2) \quad u_r = \frac{\varepsilon}{2\pi h} \int v_1 \frac{dS}{\varrho} \quad v_r = -\frac{\varepsilon}{2\pi h} \int u_1 \frac{dS}{\varrho} \quad w_r = 0$$

dove le u_1, v_1 esprimono le componenti nel piano del parallelo della velocità in un punto qualunque dello spazio S occupato dall'atmosfera.

Questa componente V_r della velocità totale V forma con questa l'angolo γ definito da

$$V V_r \cos \gamma = u u_r + v v_r = \frac{\varepsilon}{2\pi h} \int (u v_1 - v u_1) \frac{dS}{\varrho}.$$

Il binomio $u v_1 - u_1 v$ nell'immediato intorno del punto considerato è nullo; ma noi potremo considerarlo come assai piccolo per tutto lo spazio S presupponendo come postulato che ovunque (salvo in punti, linee e superficie determinate) predomini la componente lungo il parallelo su quella lungo il meridiano. Tale postulato apparisce tanto più legittimo quanto più libero è il movimento, cioè quanto più i punti sono elevati nell'atmosfera, dove meno sensibili sono le perturbazioni locali dovute alla temperatura e all'attrito esterno ed interno. Allora, infatti, è valido con molta approssimazione il teorema delle aree, pel quale ogni moto lungo il meridiano deve assumere dopo breve cammino una forte deviazione verso Est (nell'emisfero boreale).

Noi ammetteremo quindi per approssimazione

$$u u_r + v v_r = 0$$

cioè

$$(3) \quad -\frac{u}{v_r} = \frac{v}{u_r} = \frac{V}{V_r} = k$$

dove k sarà in generale una funzione di x, y, z , che dobbiamo ritenere ovunque piuttosto piccola, perchè la componente di deviazione V_r basta a deviare il movimento dalla sua direzione iniziale di un angolo assai prossimo al retto, e dev'essere quindi grandissima. Poichè, inoltre, il moto si suppone variare assai lentamente da punto a punto sia in grandezza (accelerazione nulla) sia in direzione (predominio della componente secondo il parallelo), la k potrà ritenersi approssimativamente come costante in un

(1) Vedi le mie *Note di Meteorologia matematica* in Rendic. Istit. Lomb.; 1902.

intorno abbastanza vasto del punto considerato. Essa finalmente è positiva, perchè il moto è deviato verso destra (sull'emisfero boreale). Allora dalle (2) si ricava

$$(4) \quad \Delta_2 u + \frac{2\epsilon k}{h} u = 0 \quad \Delta_2 v + \frac{2\epsilon k}{h} v = 0.$$

Queste due equazioni esprimono le ipotesi semplificatrici introdotte, cioè la quasi normalità di V_r a V e la costanza di k , e possono sostituirsi, date tali ipotesi, a due delle equazioni del moto.

Poniamo per analogia

$$(5) \quad \Delta_2 w + \frac{2\epsilon k}{h} w = 0$$

e vediamo quale significato dinamico abbiano le ipotesi rappresentate dalle (4) (5). Le equazioni del moto diventano

$$(6) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} - 2\epsilon(ku - v) &= 0 \\ \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial y} - 2\epsilon(kv + u) &= 0 \\ \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial z} - 2\epsilon kw &= 0. \end{aligned}$$

Esse ci dicono anzitutto che *l'attrito interno si esplica come un attrito esterno*, il che si può intendere (secondo i concetti di Helmholtz) nel senso che l'energia perduta sia principalmente impiegata a creare dei vortici (1).

Eliminando inoltre la \mathfrak{L} e indicando con ξ, η, ζ le componenti della rotazione.

$$\xi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad \eta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad \zeta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

e con ξ_r, η_r, ζ_r le analoghe componenti della rotazione nel moto V_r , si ha

$$\begin{aligned} 2\xi &= -\frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v_r}{\partial z} = 2\xi_r \\ 2\eta &= \frac{1}{k} \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial u_r}{\partial z} = 2\eta_r \\ 2\zeta &= \frac{1}{k} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial u_r}{\partial y} - \frac{\partial v_r}{\partial x} \right) = 2\zeta_r \end{aligned}$$

(1) Arrhenius, *Lehrb. d. Kosm. Physik*, pag. 679. Anche il Sandström (ibid. pag. 740) assume tale semplificazione dell'attrito interno in esterno. Qui ne vediamo il significato cinematico e definiamo il sistema di movimenti che essa determina.

cioè la rotazione del moto reale è esclusivamente quella indotta dalla rotazione terrestre, o, in altre parole, la circolazione convettiva dell'atmosfera non ammette potenziale di moto solo perchè è perturbata dalla rotazione terrestre.

3. Rimane a vedere quali condizioni le ipotesi assunte impongano alla \mathfrak{T} . Le equazioni (6) possono scriversi sotto la forma

$$(7) \quad \begin{aligned} u &= \frac{k}{2\varepsilon(1+k^2)} \left\{ \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial x} + \frac{1}{k} \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial y} \right\} \\ v &= \frac{k}{2\varepsilon(1+k^2)} \left\{ \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial y} - \frac{1}{k} \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial x} \right\} \\ w &= \frac{1}{2\varepsilon k} \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial z} \end{aligned}$$

Perchè le equazioni generali del moto (1) siano soddisfatte identicamente da queste espressioni di u, v, w , la \mathfrak{T} deve soddisfare alle tre condizioni

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(A_2 \mathfrak{T} + \frac{2\varepsilon h}{h} \mathfrak{T} \right) &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(A_2 \mathfrak{T} + \frac{2\varepsilon k}{h} \mathfrak{T} \right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(A_2 \mathfrak{T} + \frac{2\varepsilon k}{h} \mathfrak{T} \right) &= 0 \end{aligned}$$

che si riducono, a meno di una costante aggiuntiva alla \mathfrak{T} , all'unica

$$(8) \quad A_2 \mathfrak{T} + \frac{2\varepsilon k}{h} \mathfrak{T} = 0.$$

È facile vedere come questa condizione non sia soltanto necessaria, ma anche sufficiente perchè le (7) soddisfacciano identicamente le equazioni del moto, e possano quindi sostituirsi a queste le (4) (5), dalle quali le (7) derivano.

Tutte le funzioni incognite del problema sono quindi integrali della sola equazione differenziale

$$(9) \quad A_2 f + a^2 f = 0 \quad \left(a^2 = \frac{2\varepsilon k}{h} \right)$$

già integrata in molti altri problemi di Fisica matematica. Non sono però integrali indipendenti, in quanto le u, v, w sono esprimibili colla \mathfrak{T} mediante le (7); basta quindi determinare un solo integrale dell'equazione (9).

4. Supponendo eseguite le integrazioni, dalle espressioni di u, v, w si deducono le componenti relative alla superficie della terra, verticale verso

l'alto (V), meridiana verso nord (N) e parallela verso est (E) colle formole

$$\begin{aligned}
 V &= (u \cos \varphi + v \sin \varphi) \sin \vartheta + w \cos \vartheta \\
 (10) \quad N &= -(u \cos \varphi + v \sin \varphi) \cos \vartheta + w \sin \vartheta \\
 E &= -u \sin \varphi + v \cos \varphi
 \end{aligned}$$

ove ϑ è la colatitudine, φ la longitudine est contata da un meridiano iniziale.

Noi supponiamo una distribuzione simmetrica intorno all'asse e rispetto all'equatore, per la quale V, N, E debbono essere indipendenti da φ , e per la quale ai valori ϑ e $\pi - \vartheta$ della colatitudine debbono corrispondere valori eguali per V ed E, valori eguali ma di segno contrario per N.

Trasformiamo analogamente le equazioni del moto (6) in coordinate polari mediante le formole di trasformazione

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi \quad z = r \cos \vartheta.$$

Notando che per la simmetria dev'essere pure $\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \varphi} = 0$, si ha

$$\begin{aligned}
 (11) \quad & \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \vartheta} + 2\varepsilon k N + 2\varepsilon E \cos \vartheta = 0 \\
 & kE + V \sin \vartheta - N \cos \vartheta = 0 \\
 & \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial r} - 2\varepsilon k V + 2\varepsilon E \sin \vartheta = 0
 \end{aligned}$$

donde si ricavano

$$\begin{aligned}
 (12) \quad 2\varepsilon(1 + k^2) V &= -\frac{1}{k} \sin \vartheta \cos \vartheta \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \vartheta} + \left(k + \frac{\cos^2 \vartheta}{k}\right) \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial r} \\
 2\varepsilon(1 + k^2) N &= \frac{1}{k} \sin \vartheta \cos \vartheta \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial r} + \left(k + \frac{\sin^2 \vartheta}{k}\right) \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \vartheta} \\
 2\varepsilon(1 + k^2) E &= -\left(\cos \vartheta \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \vartheta} + \sin \vartheta \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial r}\right)
 \end{aligned}$$

che equivalgono alle (7) espresse in coordinate polari.

5. L'integrale generale della (9) è

$$(13) \quad f = \sum_{n=0}^{n=\infty} R_n \sum_{s=0}^{s=n} (C_s \cos s\varphi + D_s \sin s\varphi) \Theta_{ns}$$

ove C_s, D_s sono due costanti,

$$R_n = a_n z^n \left\{ 1 - \frac{a^2 r^2}{2(2n+3)} + \frac{a^4 r^4}{2 \cdot 4(2n+3)(2n+5)} - \dots \right\} \\ + \frac{b_n}{z^{n+1}} \left\{ 1 - \frac{a^2}{2(2n+3)} \frac{1}{r^2} + \frac{a^2}{2 \cdot 4(2n+3)(2n+5)} \frac{1}{r^4} - \dots \right\}$$

essendo pure a_n, b_n delle costanti, ed r il raggio vettore dal centro della terra,

$$\Theta_{ns} = \sin^s \vartheta \left\{ \cos^{n-s} \vartheta - \frac{(n-s)(n-s-1)}{2(2n-1)} \cos^{n-s-2} \vartheta + \right. \\ \left. + \frac{(n-s) \dots (n-s-3)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)} \cos^{n-s-4} \vartheta - \dots \right\}.$$

Per la simmetria del sistema rispetto all'asse terrestre la \mathfrak{T} , che è uno di questi integrali, dev'essere indipendente da φ ; debbono quindi essere nulli tutti i coefficienti C_s, D_s per s diverso da 0. Per la simmetria rispetto all'equatore la \mathfrak{T} deve contenere inoltre soltanto potenze pari di $\cos \vartheta$, deve essere cioè della forma

$$\mathfrak{T} = \sum_{m=0}^{m=\infty} R_{2m} \left\{ \cos^{2m} \vartheta - \frac{2m(2m-1)}{2(4m-1)} \cos^{2m-2} \vartheta + \dots \right\}.$$

È facile vedere come questa posizione soddisfaccia, in base alle (12) anche alle condizioni di simmetria necessaria per V, N, E .

Il problema è quindi analiticamente risolto per ogni regione dell'atmosfera entro la quale la k , e quindi la a^2 , possano considerarsi come costanti, e se ne conosca il valore. In altra comunicazione vedremo che queste due condizioni si verificano nello strato d'aria a contatto colla terra.

Ma la forma degli integrali non varia col variare continuo, ma lentissimo, di k , cioè col passaggio da una regione all'altra; essi ci esprimono quindi il sistema dei movimenti in tutta l'atmosfera.

Fisica. — *Sui raggi di Blondlot.* Nota di E. SALVIONI, presentata dal Socio A. RÖRTI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sull'origine dell'energia emessa dai corpi radioattivi.* Nota di C. BONACINI, presentata dal Socio P. BLASERNA.

1. — Due ipotesi principali sono state enunciate per ispiegare la produzione di energia dei corpi radioattivi. Secondo la prima, i diversi fenomeni della radioattività sarebbero la conseguenza di una lenta e continua trasformazione sostanziale nell'atomo; secondo l'altra invece, il corpo radioattivo sarebbe semplicemente un trasformatore di un'energia raggiante propagantesi per ogni dove, e che esso potrebbe assorbire.

Per quanto ciascuna ipotesi conti illustri sostenitori, non si hanno ancora contributi sperimentali diretti sulla questione. Vero è che alcuni risultati sono parsi indici favorevoli all'ipotesi della trasformazione, ma forse non si può attribuire ad essi un gran valore.

Così il Rutherford da un'esperienza istituita per controllare se l'attività di un sale di radio varia colla concentrazione, conclude: « È dunque improbabile che l'energia esplicata dal radio sia dovuta all'assorbimento di una radiazione esterna incognita che sia simile in carattere alle radiazioni emesse »⁽¹⁾. Senonchè questa esperienza è stata discussa dall'Ackroyd⁽²⁾ e dall'Ashworth⁽³⁾, e dimostrata inesatta appunto nella conclusione, con osservazioni che appaiono giustissime. E del resto si può osservare che in ogni modo l'esperienza del Rutherford rifletterebbe soltanto un aspetto *speciale* della questione, poichè concluderebbe relativamente ad un'energia che fosse « di carattere simile » a quella emessa dalle sostanze radioattive.

Or bene noi, senza voler parteggiare *a priori* per l'idea che causa prima della radioattività sia un'energia raggiante incognita, proveniente dal di fuori, andavamo da tempo pensando a trovar modo per controllarne direttamente l'esistenza. E poichè il metodo che abbiamo ideato non sappiamo se sia stato da altri proposto, noi ne diamo esposizione nella presente Nota, riferendo insieme sulle esperienze che abbiamo tentato al riguardo.

2. — L'idea prima, da cui mi sono lasciato guidare nelle mie ricerche, fu quella di paragonare l'attività di un corpo radioattivo nelle ordinarie condizioni di libertà, con quella che esso dimostri quando sia circondato completamente da una materia, che presumibilmente sia opaca per radiazioni anche molto penetrative.

(1) *Nature*, 7 January 1904, pag. 222.

(2) *Nature*, 28 January 1904, pag. 295.

(3) *Id. Id.*

Ora *un corpo radioattivo*, nella nostra ipotesi, è *necessariamente un corpo assorbente*, e realizza quindi il corpo opaco che si richiede.

Ciò posto, ecco come si potrebbe guidare l'esperimento. — Un pezzo di materia radioattiva sia racchiuso per un tempo determinato in una celletta di materia assai opaca pei raggi emessi da sostanze radioattive; e insieme sia chiuso un segnalatore della sua attività (es.: un corpo che cambi colore sotto l'azione dei raggi emessi). Si ripeta poi l'esperienza in uguali circostanze, salvo a seppellire alla sua volta la celletta in mezzo a materia radioattiva. Se la segnalazione in questo secondo caso fosse minore, sarebbe da concluderne che è venuto meno al corpo interno un rifornimento di energia dal di fuori, causa l'assorbimento esercitato su questa dall'involucro radioattivo.

Il dispositivo ora descritto potrà in pratica presentare un grave inconveniente. La celletta di piombo (od altro), il cui ufficio è naturalmente di evitare che sul segnalatore agisca anche la materia radioattiva esterna, non potrebbe bastare allo scopo, se non sotto spessore esagerato; ciò che intanto porterebbe ad impiegare una quantità troppo grande di materiale per il blocco: — e d'altra parte, data l'ingentissima penetrazione dei raggi γ , non ci si potrebbe ritenere totalmente al sicuro di influenze, che tenderebbero appunto a mascherare l'effetto cercato, se pur esistesse.

Vero è che certe sostanze radioattive, come il polonio, danno un'emissione poco penetrativa; ma è altresì vero che non sarebbe tanto facile provvedere di esse la quantità richiesta per l'esperienza.

Si gira invece la difficoltà, quando si sopprima addirittura la celletta intermedia, e si sperimenti con una sola materia radioattiva, la quale serva ad un tempo da agente e da schermo. Sarà così tolta anche una possibile influenza della radioattività indotta nelle pareti della celletta; e per di più il saggio potrà esser fatto in un solo periodo. Basterà infatti operare così:

Scelto un segnalatore qualunque delle radiazioni di una certa sostanza radioattiva, lo si divida in due parti: una di queste si seppellisca completamente nella materia stessa, in modo che vi resti come bloccata, l'altra invece si immerga solo parzialmente. Dopo un certo tempo (sufficiente perchè il segnalatore sia alterato), si confrontino le due segnalazioni, e si veda se quella della parte bloccata sia minore.

Sotto questa forma si dimostra palesamente come la questione di cui ci occupiamo venga quasi a confondersi colla ricerca del modo con cui è distribuita l'attività nella massa di un corpo radioattivo, e se, e come, varî col tempo: cosa questa, che è già interessante di per sè stessa.

3. — Il concetto esposto ho tentato di tradurre in atto, compatibilmente coi mezzi posseduti.

Il modestissimo campione di materia radioattiva di cui ho potuto disporre, fu acquistato presso il dott. Richard Sthamer di Hamburg. È venduto come

cloruro di bario e di radio. Si presenta come una polvere a grana grossa e irregolare, contenuta in un tubetto di vetro chiuso alla lampada, occupando un volume di circa 0,8 cc. Appare discretamente luminoso nell'oscurità: la sua radiazione produce sensibili effetti fluorogenici e fotografici. Una lastra rapida ordinaria, avvolta in carta nera, posta a 10 cm. di distanza dal tubetto, resta vigorosamente impressionata in circa 12 ore. Coll'azione di un intenso campo magnetico ho assodato l'esistenza nel fascio emesso di raggi deviabili e non; esistenza, riconfermata poi largamente da numerosi saggi, fatti per altro scopo, in riguardo alla diversa penetrazione dei raggi componenti il fascio stesso ⁽¹⁾.

Un primo saggio ho cercato di condurre in modo da evitare l'apertura del tubetto: ed ecco come. — Il fatto che in generale la materia radioattiva è assai poco trasparente per le radiazioni che essa emette, sì che nell'irraggiamento efficace all'esterno può intendersi impegnato soltanto un sottile strato superficiale ⁽²⁾, fa rinunciare all'idea di avvertire direttamente dal di fuori le variazioni di attività verificantisi per avventura col tempo nell'interno della massa. Ma io ho pensato che si potrebbero forse cogliere queste variazioni, cercando se l'attività della sostanza, rimasta per lungo tempo in riposo, cambia quando la si agiti, in modo da portare ad agire esternamente quelle parti, che per essere rimaste bloccate avessero perduto della loro efficacia.

L'esperienza fatta prendendo a giudice dell'attività la luminosità della materia, prima e dopo l'agitazione, non mi ha portato a rilevare alcuna differenza ⁽³⁾. Uguale risultato ho avuto confrontando i valori dell'impressione fatta su pellicole fotografiche (ultra rapide) esposte quasi a contatto del tubetto, prima e dopo l'agitazione, per uno stesso tempo: — tanto se le pellicole erano nude, sì da rimanere impressionate soprattutto dalla luce di fosforescenza, quanto se erano protette da questa con carta nera, sì da registrare le sole radiazioni invisibili.

Il periodo di riposo della massa fu una volta di cinque giorni, e un'altra di tredici giorni. Per utilizzare nel miglior modo la condizione, facevo le tre specie di saggi in una sol volta (tutto essendò predisposto per la maggiore prontezza possibile).

(1) Cfr. mia Nota: *Ricerche di radioattività*. Atti della R. Acc. di Modena. Febbraio 1904.

(2) Ad es.; per la sostanza radioattiva di cui io dispongo; non si nota differenza nell'effetto fotografico quando alla superficie radiante corrispondano spessori varianti da mm. 1,3 a cm. 1,8.

(3) Sotto questa forma l'esperienza sarebbe come l'inversa di quest'altra (*mutatis mutandis*). Osservando al buio una sostanza fosforescente pulverulenta, dopo esposizione alla luce, si nota un affievolimento improvviso della sua luminosità, e talora l'estinzione totale, quando la si agiti violentemente: poichè coll'agitazione le parti eccitate vanno a seppellirsi nella massa e non si avvertono più dal di fuori.

Non traggo alcuna conseguenza da queste mie esperienze. Tanto più che per dare ad esse un significato, bisogna ammettere che la materia, per avventura esausta col riposo, impieghi un certo tempo a riprendere il suo grado di attività, quando vien meno l'azione protettrice dello strato esterno.

Per condurre il saggio con rigore, tenendo conto anche di questa condizione, converrebbe usare un apparecchio analogo al fosforoscopio di Becquerel.

4. — Riuscito vano questo primo tentativo, mi sono deciso ad aprire il tubetto, per sperimentare veramente nel modo descritto nel paragrafo precedente.

Come segnalatore dell'attività ho scelto dapprima una carta lenta al bromuro d'argento. Con una strisciolina di questa, ricoperta di una più larga di carta nera, preparavo un piccolo rullo (avvolgendola sopra un cilindretto di legno di meno di un mm. di diametro); tagliavo questo in due parti, e ne chiudevo le basi per evitare l'azione della luce di fosforescenza. Aperto allora il vasetto contenente la materia radifera, uno dei due rulletti veniva totalmente sepolto nella massa stessa, mentre l'altro (un po' più lungo) veniva sommerso solo parzialmente. E si richiudeva tosto il recipiente (con tappo paraffinato).

Dopo un tempo opportuno, stabilito con esperienza preliminare, si toglievano rapidamente i due rulli, e si notava se dopo lo sviluppo, contemporaneo, esistesse nelle due striscie una diversità di impressione.

Tale diversità cercavo di rilevare non solo nelle prove finite, ma anche nelle diverse fasi dello sviluppo. E per cogliere differenze anche lievi, preparavo il rullo con molti giri, in modo da avere una certa scala di degradazione; e intercalando una strisciolina di stagnola, di cui la comparsa della immagine nello sviluppo mi serviva a cogliere una fase netta di questo.

La stessa esperienza ho ripetuto piegando invece la carta sensibile in plichi minuscoli, di forma quadrata; oppure ritagliando dei dischetti che avvolgevo con stagnola. Nel contempo cambiavo la forma del recipiente che conteneva la materia radioattiva, e ne sceglievo le dimensioni, in modo da utilizzare il massimo spessore possibile nell'azione di blocco.

Colla carta al bromuro d'argento la durata dell'impressione variava da 6 ad 8 ore.

Ho voluto poi ripetere la prova con una preparazione sensibile assai più lenta, cioè una carta preparata con emulsione al cloruro d'argento: nel qual caso l'esperienza si prolungava per circa 12 giorni.

Ebbene, i risultati di questi saggi sono tutti negativi. Fra le due impressioni gemelle non mi è stato mai possibile rilevare differenza in nessun modo.

5. — Questi miei risultati (mi affretto a dirlo) non potrebbero certo ritenersi come decisivi riguardo all'esistenza o meno dell'energia sconosciuta, di cui si andrebbe in traccia. E principalmente per due ragioni.

Innanzitutto, la debole attività della materia radifera di cui ho potuto disporre e lo spessore poco considerevole impegnato, legittimano troppo il sospetto che l'azione di schermo per quell'energia non sia stata sufficiente, cioè tale da permettere che nella massa interna si verifichi un cambiamento sensibile di emissione ⁽¹⁾. E d'altra parte si può anche sospettare che la durata d'impressione dei segnalatori da me usati, sia troppo breve rispetto al tempo che la materia radioattiva, protetta dalla supposta energia eccitatrice, impiega a diminuire sensibilmente la sua attività: chè infatti da più cose parrebbe lecito arguire che i corpi radioattivi fossero, se mai, dei trasformatori a lunga scadenza.

Per vedere di levare il dubbio che questa seconda circostanza possa aver influito sul risultato negativo delle mie esperienze, io mi accingo ora a ripetere il saggio facendo uso di un segnalatore assai lento, sì che la durata d'impressione salga magari a qualche mese ⁽²⁾.

Ma poichè ad un risultato ancora negativo a cui arrivassi, non potrei logicamente attribuire un valore più decisivo, persistendo sempre la prima causa di dubbio sopra esposta (a cui non mi è dato di porre rimedio), così ho creduto opportuno di riferire intanto qui sul già fatto; nella speranza che altri, provvisto di mezzi più adeguati, si decida a sperimentare col metodo da me proposto, il quale parrebbe, per sè stesso, atto a portare un contributo *sicuro* alla risoluzione dell'interessante questione.

Le considerazioni seguenti, dove sono indicate condizioni e dispositivi atti a completare e variare il metodo di saggio, varranno forse a chiarirne meglio la portata.

6. — Osserviamo innanzitutto come sia possibile raccogliere elementi relativi alla nostra questione, affidandosi all'autoalterazione che pare subi-

(1) La necessità di operare con preparati radiferi molto concentrati è manifesta. Il saggio si fonda su di un'azione *differenziale*: e questa, a parità di spessore, sarà tanto più marcata quanto più forte sarà da un lato l'assorbimento e quindi la protezione per l'interno, e dall'altro più intensa la segnalazione all'esterno.

(2) Segnalatori poco sensibili, quali occorrono per rivelare l'attività totale per lunghi periodi, si conoscono numerosi. Rimanendo nel campo della fotochimica, si sa già che, oltre i sali di argento, sono alterati dai raggi del radio il perossido di ferro e il bicromato di potassa in presenza di sostanze organiche, il bicloruro di mercurio in presenza di acido ossalico, ecc. Ma poi si potrebbe sfruttare la colorazione del vetro, che al caso nostro servirebbe benissimo in lastre, o cilindretti, o sferette, ecc. [Io avrei anzi dato la preferenza a questo segnalatore; ma la mia sostanza radifera non ha ancora prodotto colorazione molto sensibile nel tubetto che la contiene, in quattro mesi!]. Oppure si potrebbe ricorrere all'alterazione delle sostanze fluorescenti; es.: alla trasformazione del platino-cianuro di bario nella varietà bruna. Utile potrebbe pur tornare il fatto, di recente osservato, che il iodoformio sciolto in cloroformio diventa violetto per azione dei raggi del radio, ed è possibile accelerare o ritardare a piacere il fenomeno, con aggiunta di sali opportuni (Hardy e Willcock, *The Electrical Engineer*, t. XXXII, n. 25, 18 dicembre 1903). Potranno pure utilizzarsi le colorazioni che prendono certi sali aloidi (Giesel).

scano i composti di radio (specie contenenti bario), e che si rivela con una colorazione che essi prendono col tempo. Poichè tale alterazione si considera dovuta agli stessi raggi emessi dal composto (1), se la produzione di questi nell'interno viene col tempo a cessare o a diminuire, quella pure dovrà risultare meno sentita. E basterà quindi vedere se la variazione di colore del composto, abbandonato a sè, in riposo, per lungo tempo, sia superficiale o di massa; o, più in generale, se vari secondo dello spessore.

In questo senso è probabile che parlino eloquentemente dei fatti già osservati.

Potrà essere utile il notare se vi è differenza nel fenomeno, quando il composto radioattivo invece che in cristalli sia polverizzato minutamente.

Infine, se il composto radifero si colora poco, o in troppo breve tempo, si potrà mescolare con esso una sostanza pulverulenta, alterabile ai suoi raggi con molta lentezza (es.: platinocianuro di bario, sali aloidi, o addirittura polvere di vetro che si separerebbe poi facilmente sciogliendo la sostanza radioattiva), ed affidarsi a questa per cogliere le probabili variazioni di attività nella massa.

Qualunque poi sia l'effetto dell'emissione che si assume quale indice dell'attività all'esterno e nell'interno della massa radioattiva, uno speciale interesse potrà assumere la nostra esperienza, quando si colga il preparato radifero nel periodo in cui, disattivato per riscaldamento o per riprecipitazione dopo prolungata soluzione, sta riprendendo la sua attività; la quale, com'è noto, può anche superare, e di molto, quella antecedente all'esaurimento.

In questo periodo di rifornimento, che può essere di un mese, ed anche di due (2), l'attività nell'interno della massa non è detto che si elevi come negli strati superficiali. Orbene, i due segnalatori gemelli, o l'unico sparso nella massa a cui sopra accennavamo, potrebbero illustrare questa condizione; in cui forse si ritroverebbe accentuata quella differenziazione che si avverterebbe con metodo analogo nella sostanza radioattiva, quando avesse già raggiunto il valor limite della sua attività.

Per maggior correttezza nell'interpretazione dei risultati converrà poi in ogni caso tener presente che non tutte le segnalazioni sono da riferirsi alla stessa specie di raggi del fascio emesso; anzi deve ritenersi che ogni ricevitore eserciti sul fascio stesso un assorbimento selettivo. Sicchè tal corpo potrà essere più adatto a rivelare ad es. i raggi γ , tal altro i raggi β . Il vetro, ad es., che si colora come i raggi X, parrebbe poter indicare preferibilmente il fascio non deviabile; mentre i sali aloidi, che ci colorano come coi raggi catodici (Giesel), parrebbero segnalare piuttosto il fascio β .

(1) M^{me} Curie, *Recherches sur les substances radioactives*, 2^e éd. Paris, 1904, pag. 103.

(2) M^{me} Curie, loc. cit., pagg. 110 e 138.

Di questa condizione di cose sarà possibile valersi come di un mezzo per migliorare la nostra esperienza, rendendone più analitico il risultato; per stabilire cioè se per le tre specie di radiazioni emesse dal corpo radioattivo vi sia luogo a far differenze nel fenomeno che interessa. Basterà impegnare contemporaneamente, nella stessa esperienza, *più* segnalatori scelti opportunamente.

Vero è che questo saggio analitico, parziale, potrebbe farsi in modo più netto, impiegando corpi radioattivi che emettano solo (o prevalentemente) certi raggi; ad es. il polonio, che pare emettere solo raggi α . Ma non sarà tanto facile disporre di una quantità sufficiente di tali corpi.

È in questa separazione delle diverse forme energetiche, sotto cui si esplica la radioattività, che si raccordano spontaneamente al metodo da noi proposto, i saggi calorimetrici che si conducevano secondo la traccia segnata da Lord Kelvin in una recente nota; dove egli si dichiara appunto favorevole all'ipotesi di un'energia esterna eccitatrice della radioattività. « La mia ipotesi, egli » conclude, può essere riguardata come del tutto inaccettabile; ma almeno » sarà concesso che alcuni esperimenti siano fatti paragonando l'emissione » termica del radio, completamente circondato con una lamina spessa di » piombo, con quella trovata circondandolo con i corpi sino ad ora usati » ⁽¹⁾.

7. — Dato che il saggio da noi proposto porti per una qualunque via a risultato positivo, e tale che non lasci dubbio sul poter considerare, almeno in parte, l'energia esplicita dai corpi radioattivi come trasformazione di un'altra energia raggiante ricevuta dall'ambiente, si potranno tentare molte ricerche; ad alcune delle quali non possiamo a meno di far cenno.

Attenendosi al primo dispositivo descritto al § 2, dove si fa uso di una celletta contenente una sostanza radioattiva col segnalatore, e bloccata da altra materia radioattiva, si potrà, ad es., variando la natura e lo spessore delle pareti della celletta, studiare l'opacità diversa dei corpi all'energia nuova. Variando la materia radioattiva interna, *caeteris paribus*, si potrà stabilire se è la stessa energia che agisce su tutti. Il confronto degli effetti di radioattività di più sostanze prese in libertà, e bloccate, potrà portare a decidere se l'energia eccitatrice è omogenea oppure no (se ammette spettro). E così via.

Indipendentemente poi dal dispositivo adottato, è chiaro che le esperienze ripetute in ambienti, ove si creino artificialmente delle condizioni fisiche speciali (di magnetismo, di calore, di gravitazione, ecc.), potranno rivelare i nessi che l'energia nuova abbia colle altre conosciute.

In particolare sarà interessante ripetere l'esperienza in epoche di perielio e di afelio, per scoprire una possibile influenza solare: e più propiziamente

(1) Cfr. « L'Elettricista », 15 marzo 1904, pag. 82.

in un paese dell'emisfero sud, ove i giorni più corti corrispondono anche alla maggior distanza dal sole. [I sigg.ⁱ Curie hanno tentato, per questo scopo, un confronto dell'attività a mezzogiorno e a mezzanotte ⁽¹⁾: ma con esito negativo].

Fisica. — *Relazione fra l'indice di rifrazione e la densità dell'aria.* Nota di LUIGI MAGRI, presentata dal Corrispondente A. BATTELLI ⁽²⁾.

Da qualche anno ho intrapreso uno studio sopra la rifrazione dei gas considerata in dipendenza della loro densità, e per ora credo conveniente la presentazione dei risultati relativi all'aria.

La legge che esprime tale dipendenza è espressa o dalla formola di

$$(1) \quad \frac{n^2 - 1}{d} = \text{cost.},$$

o da quella di

$$(2) \quad \frac{n - 1}{d} = \text{cost.},$$

che fu proposta a titolo empirico; o da quella del Lorentz

$$(3) \quad \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \frac{1}{d} = \text{cost.},$$

che si deduce dalla teoria elettromagnetica.

Le ricerche sperimentali sull'argomento sono numerose e importanti, e furono eseguite con due metodi diversi.

Il primo è fondato sulla misura della deviazione che subisce un raggio di luce che attraversa un prisma cavo riempito del gas in istudio, e fu usato nelle note esperienze di Biot e Arago, Le Roux e Kayser e Rune.

L'altro è il metodo interferenziale, e di esso si sono serviti il Fizeau, il Jamin, il Ketteler, il Mascart, il Lorentz, il Prytz e il Perreau.

A questo metodo spettano le misure più precise.

Le prime esperienze esatte ed estese sull'argomento sono quelle eseguite dal Mascart ⁽³⁾; questi osservava le frange del Talbot in uno spettro, e così poteva studiare nello stesso tempo l'indice di rifrazione del gas e la dispersione.

Studiò numerosi gas facendo variare la temperatura fra 0° e 40° e spingendo la pressione fino a 6 metri di mercurio, e trovò che quando la densità varia per effetto della pressione (fatta eccezione per l'ossido d'azoto

⁽¹⁾ M.^{me} Curie, loc. cit., pag. 149.

⁽²⁾ Presentata nella seduta del 24 aprile 1904.

⁽³⁾ Ann. de l'Éc. Norm. sup., t. 6, pag. 9, 1877.

e l'ossido di carbonio) il valore della (2) resta sensibilmente costante; mantenendo invece costante la pressione, e facendo variare la temperatura, trovò che il valore di n al crescere di t va diminuendo più rapidamente di quanto esiga la relazione

$$(n - 1) (1 + \alpha t) = n_0 - 1.$$

Risultato in contraddizione con quello trovato prima da Von Lang ⁽¹⁾ per l'aria che aveva riscontrato che il valore di n al crescere di t diminuisce meno rapidamente di quanto vorrebbe la legge teorica. Il Benoit ⁽²⁾ invece trovò verificata la legge suddetta pure per l'aria. Il Walker ⁽³⁾ recentemente riconfermò per l'aria il risultato di Von Lang estendendolo all'idrogeno, mentre per l'anidride carbonica e per l'anidride solforosa ritrovò le conclusioni del Mascart.

Del resto le esperienze del Lorentz ⁽⁴⁾, del Prytz ⁽⁵⁾ e del Bleckrode ⁽⁶⁾ mostrano che nessuna delle relazioni citate è esattamente verificata dall'esperienza, quantunque la seconda sia quella che più si accordi con questa.

Invece Chappuis e Rivière ⁽⁷⁾ sperimentando sull'aria e sull'anidride carbonica fino alla pressione di 20 atm. e di 29 atm. rispettivamente, trovarono che la formula di Gladstone e Dale è verificata dentro i limiti degli errori sperimentali; e ad una conclusione identica è arrivato recentemente il Gale ⁽⁸⁾ sperimentando sull'aria fino alla pressione di 19 atmosfere.

Come si vede, uno studio esteso sull'argomento offre un grande interesse per definire le controversie sopra alcuni punti. In particolare gioverà spingere le esperienze fino a pressioni molto alte e a temperature molto lontane dall'ordinaria, per decidere fino a qual punto le leggi teoriche concordano con i risultati sperimentali.

A tale scopo ho messo insieme un apparato che mi permette di misurare l'indice di rifrazione e la densità dei gas. Descriverò brevemente l'una e l'altra parte dell'apparato.

Misura degli indici. — Ho fatto montare nell'officina di questo Istituto un robusto rifrattometro di Jamin, con la disposizione ordinaria. Gli specchi avevano uno spessore di cm. 2,5, talchè i due fasci interferenti erano distanti l'uno dall'altro di circa 2 cm. Sul cammino di questi fasci era posto il vasetto contenente l'aria compressa.

⁽¹⁾ Pogg., Ann., 153, pag. 448, 1874.

⁽²⁾ Journ. de Phys., t. 8, pag. 451, 1889.

⁽³⁾ Phyl. Trans., 201, 435, 1903.

⁽⁴⁾ Wied., Ann., 11, pag. 70, 1880.

⁽⁵⁾ Wied., Ann., 11, pag. 104, 1880.

⁽⁶⁾ Journ. de Phys., 2 sér., t. 4, pag. 109, 1885.

⁽⁷⁾ C. R., 94, pag. 718, 1882.

⁽⁸⁾ Phys. Rev., 14, pag. 1 (1902).

Nelle presenti determinazioni ho usato due di tali vasetti di differente lunghezza; essi hanno la forma rappresentata dalla fig. 1. In un quadrello di acciaio di circa 3 cm. di lato è stato praticato un foro $f f$ di un centimetro di diametro nel quale mediante la tubatura laterale l si fa penetrare l'aria compressa. Gli estremi di questo foro sono chiusi da due tappi a vite, in cui sono masticiati mediante glu marino due tronchi conici di flint termi-

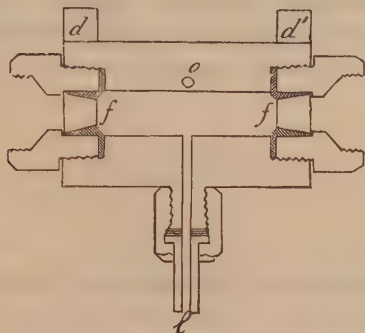


FIG. 1.

nati da due facce piane e parallele. Il diametro della base minore di questi coni è di un cm. e la lunghezza di ciascun tappo è di cm. 1,5.

Per compensare il ritardo prodotto sul raggio interferente che attraversa il vasetto dall'introduzione di questi tappi, a lato di essi su di una faccia del prisma ho posto altri due dadi pure di flint DD' dello stesso spessore e dello stesso indice di rifrazione.

Per avere la temperatura del vasetto e quindi anche quella dell'aria contenuta in esso, è praticato in o un foro che permette di introdurre un termometro nell'interno.

Ecco le dimensioni esatte dei due vasetti alla temperatura di 15° C.

Vasetto n. 1.

Lunghezza della camera d'aria. . . .	cm. 0,6691
Spessore complessivo dei due tappi . . .	" 2,9902

Vasetto n. 2.

Lunghezza della camera d'aria. . . .	cm. 1,7852
Spessore complessivo dei tappi. . . .	" 2,9902

I due vasetti differiscono fra loro solo per il blocco d'acciaio; i coni di flint masticiati nelle loro viti erano gli stessi e si potevano adattare indifferentemente all'uno e all'altro.

Per eseguir bene le misure delle variazioni della rifrazione dei gas con questo metodo, bisogna tener conto delle deformazioni che subisce il vasetto per effetto della pressione. Tali deformazioni consistono nell'allontanamento e nella compressione dei tappi di flint.

Ho istituito apposite misure per la determinazione di quest'allontanamento dei tappi, che per tutti e due i vasetti adoperati è risultato uguale e piccolissimo e cioè di cm. 0,009 per 200 atm.

Il valore della correzione dovuta all'aumento d'indice del flint che costituisce i tappi, ed al loro accorciamento, si può avere misurando gli indici di rifrazione dell'aria con i due vasetti successivamente con la formola

$$\Delta = \frac{e' f - 2f'}{f' - f}$$

dove Δ significa la quantità da aggiungersi al valore delle lunghezze e, e' delle camere dei vasetti; f, f' è il numero delle frange passate coi due vasetti per la stessa variazione di pressione.

Misura della densità. — L'apparecchio per la misura delle densità è simile a quello del Gale; solo ho dovuto costruirlo in modo che servisse per alte pressioni.

Consiste in un cilindro d'acciaio di 20 cm. circa di lunghezza e 3 cm. di diametro, nel cui interno (fig. 2) è stata praticata una incameratura e pure cilindrica di 9 cm. di lunghezza e di 0,5 mm. di diametro.

Essa termina ai due estremi in due piccoli fori che possono esser chiusi a perfetta tenuta dai due maschi r, r' . Il rubinetto r toglie o stabilisce la comunicazione tra l'incameratura e il recipiente nel quale è il gas compresso di cui si suol determinare la densità; il rubinetto r' può togliere o stabilire la comunicazione col recipiente di vetro C. Per comodità di costruzione questa parte di acciaio fu fatta di due pezzi che si possono riunire a vite fra loro come mostra la figura. La tenuta era assicurata da una sottile guarnizione d'ebanite g .

Il recipiente C, nel quale si espandeva il gas contenuto nella incameratura e , era un tubo cilindrico molto robusto della lunghezza di circa 50 cm. e diametro di circa 6 cm. Gli aumenti di capacità che subiva questo cilindro per effetto della pressione erano assolutamente trascurabili, perchè per pressione di un metro di mercurio erano minori di $\frac{0,5}{10000}$ del volume totale.

Al cilindro stesso erano saldate due tubature di vetro Q, Q' di circa un cm. di diametro interno e divise per un certo tratto.

La tubatura superiore era unita al densimetro per mezzo di un giunto simile a quelli di Regnault, e portava un rubinetto in vetro per mezzo

del quale si poteva far sfuggire l'aria contenuta in C, o si poteva eseguirvi una rarefazione opportuna.

La tubulatura inferiore (che era lunga circa 80 cm.) era unita a un rubinetto a tre vie che stabiliva a piacere le comunicazioni tra questa camera

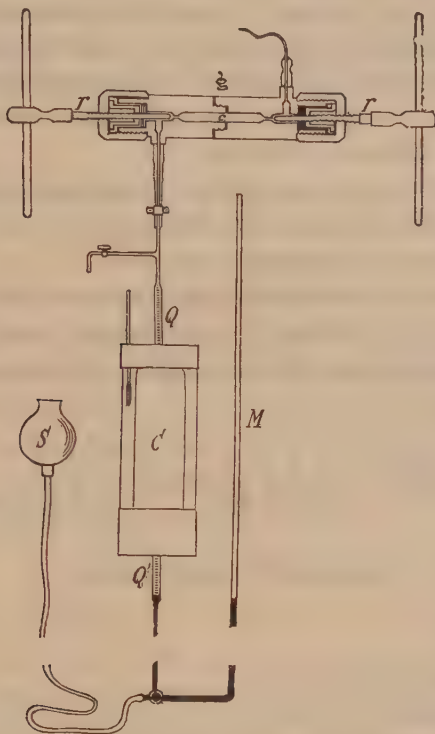


FIG. 2.

C, il serbatoio di mercurio S e il tubo manometrico M, il quale era stato scelto dello stesso diametro della tubulatura Q'.

Il serbatoio S poi era sorretto da un supporto scorrevole verticalmente, munito di un movimento a vite per i piccoli spostamenti. Il cilindro C alla sua volta era immerso in un bagno d'acqua nel quale pescava un termometro. Il blocco d'acciaio infine era circondato da un manicotto in ferro, pieno di mercurio. In questo mercurio era immerso un secondo termometro.

Ecco come si eseguiva una misura.

Si chiudeva il rubinetto r' e si apriva il rubinetto r , in modo che la camera C si riempisse dell'aria alla pressione di quella contenuta nel vasetto sperimentale. Intanto si ponevano in comunicazione tra loro la tubulatura Q', la canna barometrica M e il serbatoio di mercurio S, mediante l'apposito rubinetto a tre vie.

Si spostava poi il serbatoio S fino a che il mercurio in Q' arrivasse ad una determinata divisione, che per tutto il corso delle esperienze fu sempre la stessa. — Con un'ottimo catetometro di Nöe, il cui nonio dava il cinquantesimo di mm., si leggeva la differenza di livello tra il mercurio in Q' e in M. Questo dislivello, aggiunto alla pressione barometrica, dava la pressione h dell'aria che si trovava in C prima di immettervi quella di c .

Fatto ciò, si chiudeva il rubinetto r , e si apriva lentamente r' , indi si aspettava che si fosse stabilito l'equilibrio di pressione fra C e c , dopo di che si tornava a spostare il serbatoio S fino a quando il mercurio in Q' non fosse arrivato alla stessa divisione di prima.

Allorchè l'equilibrio era bene stabilito, si leggeva il dislivello di mercurio; il quale, aggiunto alla pressione atmosferica, dava il valore della pressione H dell'aria contenuta nelle camere C e c .

Ora si supponga per semplicità che C e c siano alla stessa temperatura e che siano V e v i loro volumi; se assumiamo come 1 le densità dell'aria a 0° e a 76 cm. avremo che la densità x dell'aria compressa in c sarà data dalla relazione

$$(4) \quad x = \frac{V + v}{v} \cdot \frac{1}{76(1 + \alpha t)} H = \frac{V}{v} \cdot \frac{1}{76(1 + \alpha t)} h.$$

Gli elementi da determinarsi saranno dunque:

il volume v ;

il volume V;

le due pressioni H e h ;

la temperatura di C e di c .

Dirò subito brevemente come siano stati determinati ciascuno di questi elementi.

a) Misura di v . — Ho eseguito questa misura pesando la quantità di mercurio necessaria per riempire completamente a 0° la camera c . In questa operazione ho usato disposizioni opportune per assicurarmi che dentro la camera non rimanessero incluse bolle di aria durante il riempimento e che in seguito tutto il mercurio racchiuso fra i rubinetti, e soltanto quello, uscisse per farne la pesata.

Questa operazione fu ripetuta tre volte e la media delle tre pesate è

$$\text{cm}^3 \quad 73,3341$$

che corrisponde a un volume di

$$\text{cm}^3 \quad 5,39384$$

Per avere il volume alle varie temperature, ho adottato come coefficiente di dilatazione cubica del blocco 0,0000333.

Poi ho misurato la deformazione del densimetro sotto pressione e mi sono assicurato che essa non ha influenza sui risultati.

b) Misura di V. — La determinazione del volume della camera di espansione compreso fra i due tratti graduati Q, Q' (fig. 2) fu fatta al solito modo, pesando il mercurio in esso contenuto ad una determinata temperatura.

I due tratti graduati Q e Q' comprendono ciascuno 70 mm. Il volume a 10° C. della camera di espansione dalla divisione 70 superiore alla divisione 70 inferiore è risultato:

$$\text{cm}^3 \quad 904,42$$

Furono anche calibrati i tratti graduati dei tubi Q e Q' e si ebbe per ogni divisione:

$$\text{di Q cm}^3 \quad 0,0748$$

$$\text{di Q' cm}^3 \quad 0,0770$$

La calibrazione di questi tratti mi diede modo di determinare con facilità il volume dei tubi di congiunzione tra Q e il blocco d'acciaio, misurando per mezzo del tubo manometrico M le pressioni a cui andava soggetta una certa quantità di aria asciutta, racchiusa tra Q e il rubinetto r, e della quale facevo variare il volume di quantità che potevo conoscere per mezzo della graduazione di Q. Questo volume a 10°,5 risultò di

$$\text{cm}^3 \quad 14,10$$

dal tratto 70 di Q al rubinetto r.

Ho già detto che tutte le volte che si eseguiva una misura della densità dell'aria compressa, si riportava il mercurio in Q' alla stessa divisione, cosicchè il volume totale della camera di espansione da r' fino a questo tratto fu

$$V = \text{cm}^3 \quad 922,60 \text{ a } 10^\circ.$$

Come coefficiente di dilatazione cubica del vetro adottai il valore

$$0,00002649.$$

c) Determinazione di H e h. — Per la conoscenza di H e di h occorre misurare la pressione atmosferica, i dislivelli di mercurio fra Q' e il tubo manometrico M e le temperature del mercurio e del catetometro per le opportune correzioni.

d) Misura delle temperature nel blocco di acciaio nel vasetto del rifrattometro. — Per la misura di queste temperature ho adoperato due buoni termometri: uno di Baudin ed uno di Golaz. Essi non si trovano quasi mai alla stessa temperatura, ma differiscono sempre di quantità che al massimo arrivano a un grado.

Il valore di x dato dalla formula (4) è il valore della densità dell'aria nel blocco di acciaio la cui temperatura è t' ; per avere il valore della

densità nel vasetto del rifrattometro, che è ad una temperatura t'' , basta dedurlo dal valore di x mediante la formula

$$D = \alpha \{1 + \beta (t' - t'')\}$$

Per i valori di β mi sono servito delle tavole di Regnault e d'Amagat.

Andamento delle esperienze. — Le frangie di interferenza si osservavano per mezzo di un buon cannocchiale. Il vasetto e il densimetro erano riuniti con tubi di rame fra loro e con un robusto recipiente di acciaio della capacità di circa 3 litri, il cui ufficio era di rendere lente e regolari le variazioni di pressione quando si introduceva, o quando si lasciava sfuggire l'aria compressa; la qual cosa si poteva eseguire con la massima facilità per mezzo di due rubinetti a portata di mano dell'osservatore delle frangie. L'aria si aspirava da una torre di calce spenta e si comprimeva a 200 atmosfere in un grosso recipiente, d'onde veniva agli apparati facendola passare attraverso ad una torre con potassa caustica, dove si asciugava e perdeva le ultime tracce di anidride carbonica.

Le esperienze venivano fatte con pressioni crescenti e le letture venivano fatte ad ogni intervallo di 50 frangie o di 150, a seconda che si trattava del vasetto piccolo, o di quello grande.

Ho eseguito le prime esperienze con la luce del sodio, poi ho adoperato la luce dell'arco a mercurio nel vuoto corrispondente a una lunghezza d'onda di 0,5461 μ .

I risultati che sono la media di parecchie serie di esperienze, sono riportati nelle seguenti tabelle:

VASETTO PICCOLO.

Temp. medie	D	n	$K \frac{n-1}{d}$	$\frac{n^2-1}{n^2+1} \frac{1}{d}$
0°	1	1.0002929	5.364	0.0001953
14.6	14.84	1.0004338	5.349	0.0001947
14.2	28.52	1.008385	5.385	0.0001957
14.3	42.13	1.01241	5.393	0.0001959
14.3	55.72	1.01643	5.401	0.0001960
14.4	69.24	1.02044	5.406	0.0001961
14.4	82.65	1.02440	5.405	0.0001960
14.5	96.16	1.02842	5.410	0.0001961
14.5	109.56	1.03242	5.417	0.0001962
14.5	123.04	1.03633	5.406	0.0001956
14.6	136.21	1.04027	5.413	0.0001957
14.8	149.53	1.04421	5.413	0.0001956
14.9	162.76	1.04818	5.415	0.0001957
14.9	176.27	1.05213	5.420	0.0001954

VASETTO GRANDE.

Temp. medie	D	n	$K \frac{n-1}{d}$	$\frac{n^2-1}{n^2+1} \frac{1}{d}$
16° 3	16.67	1.004877	5.354	0.0001949
16. 3	32.12	1.009429	5.380	1954
16. 7	47.52	1.01401	5.396	1961
16. 2	62.92	1.01856	5.402	1960
16. 5	78.29	1.02311	5.403	1960
16. 6	93.64	1.02767	5.410	1960
16. 6	108.97	1.03221	5.413	1960
16. 8	124.30	1.03673	5.407	1957
16. 7	139.60	1.04128	5.405	1957
16. 9	154.78	1.04578	5.415	1956

Conclusioni. — I risultati riferiti dimostrano che l'indice di rifrazione dell'aria sotto pressione cresce più rapidamente di quando voglia la $\frac{n-1}{d} = \text{cost.}$; mentre la $\frac{n^2-1}{n^2+1} \frac{1}{d}$ sembra si mantenga sufficientemente costante, se si eccettuano i valori ottenuti al disotto di 30 atm., valori che non possono avere una grande precisione, perchè, per così piccole pressioni, il densimetro non si trova in condizioni di grande sensibilità.

Chimica. — *Sul congelamento delle soluzioni in solventi dimorfi* ⁽¹⁾. Nota di G. BRUNI e A. CALLEGARI, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

I fenomeni di equilibrio eterogeneo che intervengono fra le differenti modificazioni di un corpo polimorfo sono state oggetto di molte ricerche sperimentali e negli ultimi tempi anche di studi teorici assai considerevoli basati sulla teoria delle fasi, cosicchè le nostre conoscenze intorno ad essi possono considerarsi come complete finchè ci si limita ai sistemi di un solo componente. Per ciò che riguarda i sistemi binari noi troviamo bensì varî importanti lavori sperimentali, come pure alcuni studi teorici molto pregevoli; tuttavia un quadro completo dei fenomeni di equilibrio eterogeneo in tali miscele manca ancora. È soprattutto da notarsi che i dati che noi possediamo si riferiscono quasi esclusivamente agli equilibri stabili di corpi enantiotropi; il caso della monotropia ed in genere il campo degli equilibri metastabili è quasi affatto trascurato.

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nel laboratorio di Chimica generale della R. Università di Bologna.

Nel caso che uno dei due componenti sia dimorfo enantiotropo e l'altro non dia soluzioni solide con nessuna delle modificazioni cristalline del primo, il punto di trasformazione di questo non viene affatto variato dall'aggiunta dell'altro, come si può dedurre teoricamente e come venne mostrato sperimentalmente da vari autori. Tali punti di trasformazione possono quindi esser determinati anche in miscele con corpi indifferenti, sia con il metodo termometrico, sia con quello dilatometrico. Alla temperatura di trasformazione si tagliano naturalmente le curve di solubilità o di congelamento delle due modificazioni. Perciò la determinazione delle curve di congelamento o solubilità costituisce un altro metodo per la misura del punto di trasformazione, metodo che venne pure impiegato da parecchi autori e specialmente nel laboratorio di H. W. B. Roozeboom; così da Reinders⁽¹⁾ pel joduro mercurico e da v. Zawidzki⁽²⁾ per le miscele di NH_4NO_3 e AgNO_3 . Anche il metodo elettrico impiegato da Cohen⁽³⁾ per le due forme dello stagno si basa del resto sullo stesso principio.

Il caso che il secondo corpo sia isodimorfo e possa così passare dalla fase liquida nelle fasi solide, venne studiato sperimentalmente pel primo da Bellati e scolari⁽⁴⁾, e quindi in modo più completo da Roozeboom e allievi⁽⁵⁾. Roozeboom, basandosi sulla teoria delle fasi, diede inoltre una trattazione teoretica⁽⁶⁾ di questo argomento, trattazione estesissima e che per ciò che si riferisce agli equilibri stabili di corpi enantiotropi può esser considerata come affatto esauriente. Degli equilibri instabili fra corpi isodimorfi si occupa solo una recentissima memoria di W. Meyerhoffer⁽⁷⁾, che si riferisce alle curve di tensione di vapore di cristalli misti e della quale ci occuperemo più tardi.

Gli equilibri instabili più importanti che si presentino nei corpi dimorfi sono senza dubbio i fenomeni di congelamento o di fusione delle forme labili e metastabili, quali essi si verificano assai spesso nei corpi monotropi ed anche in corpi enantiotropi il cui punto di fusione ordinario sia poco lontano dal punto di trasformazione, come nello zolfo.

È noto che sia pei corpi enantiotropi che pei monotropi, il punto di fusione labile deve essere più basso di quello stabile⁽⁸⁾. Ciò risulta già dalle figg. 1 e 2 che riferiscono rispettivamente alla enantiotropia ed alla monotropia. Sono in esse AB le curve di tensione di vapore del corpo li-

(¹) Zeitschr. f. physik. Ch., XXXII, 494 (1900).

(²) Ibid., XLVII, 721 (1904).

(³) Ibid., XXX, 601; XXXIII, 57; XXXV, 588 (1900-901).

(⁴) Atti del R. Istituto Veneto, 1891.

(⁵) Zeitschr. f. physik. Ch., XXX, 430; XXXII, 494, 537; XLVII, 721 (1899-1904).

(⁶) Ibid., XXX, 413 (1899).

(⁷) Zeitschr. f. physik. Ch., XLVI (Ostwalds Jubelband), 368 (1903).

(⁸) Van't Hoff, *Vorlesungen*, II Heft, pagg. 126-127; Roozeboom, *Heterogene Gleichgewichte*, I Heft, pagg. 154, 159.

quido, CO_1 e DO_2 quelle dei due solidi. I punti d'incontro di queste colle AB danno i punti di fusione, e si vede che O_2 punto di fusione della modifica-

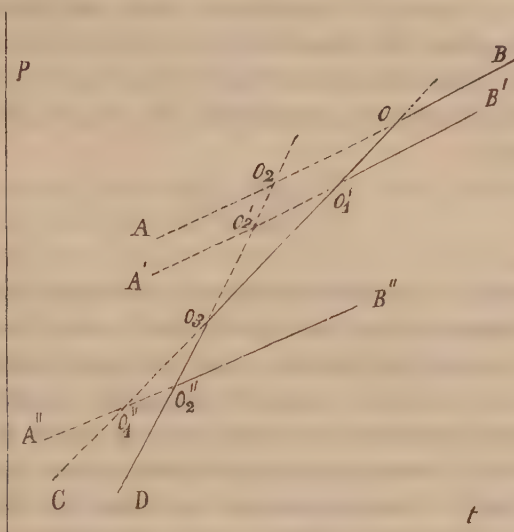


FIG. 1.

zione labile corrisponde in entrambi i casi ad una temperatura T_2 inferiore alla temperatura T_1 corrispondente al punto O_1 della forma stabile.

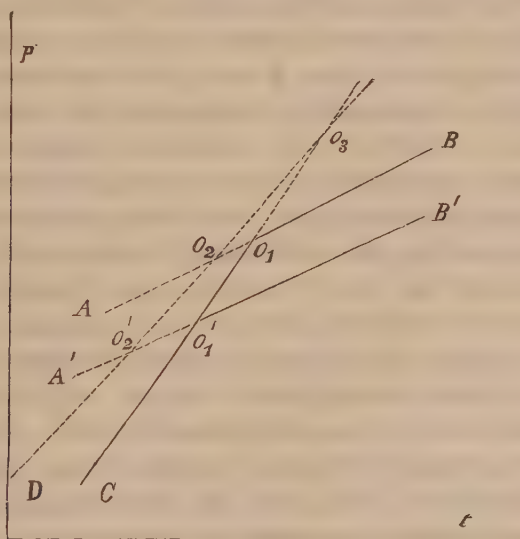


FIG. 2.

Nella fig. 1 esiste il punto d'incrocio O_3 delle due CO_1 e DO_2 che corrisponde ad una temperatura di trasformazione stabile. Nella fig. 2 tale

punto O_3 viene ad essere situato al disopra dei punti di fusione ed è perciò non solo instabile, ma al tutto inaccessibile. È stato dimostrato che indicando con Q_1 e Q_2 i calori di fusione delle due modificazioni e con Q_3 il calore di trasformazione, nel caso della fig. 2 è $Q_1 > Q_2$, mentre nel caso della fig. 1 si ha l'inverso, poichè è $Q_2 = Q_1 + Q_3$. Van't Hoff ha anche dimostrato ⁽¹⁾ come fra le sei grandezze T_1 , T_2 , T_3 , Q_1 , Q_2 , Q_3 , esista la semplice relazione:

$$\frac{Q_2}{T_2} = \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_3}{T_3}.$$

Sul come varino i due punti di fusione di un corpo dimorfo per aggiunta di una terza sostanza non era stato fino a questi ultimi tempi eseguita che una sola ricerca con risultati positivi e cioè quella di Stortenbecker ⁽²⁾ sul *monocloruro di jodio* il quale è dimorfo monotropo; questi risultati presentano però alcune incertezze per ragioni che esporremo più sotto. La difficoltà principale è di trovare corpi che si prestino bene alle misure. Non è infatti troppo facile il trovare sostanze che presentino due modificazioni con punti di fusione abbastanza vicini e che si prestino entrambe ad esperienze crioscopiche.

Un altro esempio corrispondente al caso della monotropia venne trovato da noi nella *o. nitro-benzaldeide* che noi impiegammo come solvente crioscopico in alcune ricerche che saranno pubblicate nel prossimo fascicolo. Queste esperienze erano già chiuse quando fu pubblicata una memoria di E. Beckmann ⁽³⁾ in cui questi descrive esperienze eseguite col *joduro di metilene* il quale presenta invece il caso della enantiotropia. Siccome però Beckmann non ha trattato affatto la questione dal punto di vista teorico, così noi prima di discutere i dati sperimentali nostri e quelli precedenti, svolgeremo alcune considerazioni teoretiche su questi interessanti fenomeni.

Consideriamo dapprima il caso che il corpo sciolto non formi soluzioni solide con nessuna delle due modificazioni del solvente. In tal caso (riferendosi sempre alle figg. 1 e 2) le curve delle tensioni di vapore delle modificazioni solide resteranno inalterate e solo verranno abbassate quelle del liquido da AB in A'B'. I punti di fusione diventano quindi O'_1 e O'_2 . Dalle figure si rileva immediatamente che pei corpi enantiotropi (fig. 1) questi due punti sono fra loro meno distanti che O_1 e O_2 , cioè l'abbassamento $T_1 - T'_1$ provocato nel punto di congelamento della forma stabile è maggiore di quello $T_2 - T'_2$ subito dal punto di congelamento della forma labile. Può anzi accadere che quando la soluzione sia molto concentrata,

⁽¹⁾ Lib. cit., I Heft, pag. 20. Cfr. anche Roozeboom, lib. cit., I Heft, pag. 156.

⁽²⁾ Zeitschr. f. physik. Ch., III, 11 (1889); X, 183 (1892).

⁽³⁾ Ibid. XLVI (Ostwalds Jubelband), 853 (1903).

talchè la curva AB sia tanto abbassata da tagliare le altre due al disotto del punto O_3 , come la $A''B''$, il punto di fusione O''_2 diventi più alto di O''_1 e quindi stabile.

Pei corpi monotropi (fig. 2) al contrario O'_1 e O'_2 risultano più discosti che O_1 e O_2 ed è così: $T_1 - T'_1 < T_2 - T'_2$, ossia il punto di congelamento della forma labile viene abbassato maggiormente di quello della forma stabile.

Questo differente comportamento può servire a decidere se un corpo dimorfo sia monotropo od enantiotropo.

È chiaro che pei corpi enantiotropi quando si conoscano le 3 temperature T_1 , T_2 e T_3 e si sia determinata la costante molecolare di abbassamento e quindi il calore di fusione per una delle due forme, si possono facilmente calcolare i valori corrispondenti all'altra forma servendosi della sovra esposta relazione di van't Hoff.

Questo caso dell'enantiotropia si verifica, come si disse, nel caso del joduro di metilene studiato da Beckmann; questi dice infatti che il joduro di metilene si presenta sotto due forme che fondono rispettivamente a $4^\circ 0$ e $4^\circ 47$, fatto che era già stato intraveduto da Garelli e Bassani (¹). Sciogliendovi come sostanze normali la canfora ed il benzoilmentolo egli trovò come costante di abbassamento molecolare per la forma fondente più alto il valore $K_1 = 144$, e per quella che fonde più basso $K_2 = 137$, e ne deduce quindi come calori di fusione per la prima $Q_1 = 10,7$ e per la seconda $Q_2 = 11,2$. Questo comportamento sarebbe già bastato per poter dedurre che si tratta di un corpo enantiotropo. Ma a Beckmann è anche sfuggito che il polimorfismo del joduro di metilene era già stato constatato da Tammann nel corso delle sue splendide ricerche sul variare dei punti di fusione colla pressione.

Il $CH_2 J_2$ è infatti secondo T. e Hollmann (²) tetramorfo; due delle modificazioni si presentano però solo a pressioni assai elevate (sopra 200 atmosfere); a pressione ordinaria si trovano due forme che hanno un punto di trasformazione a $-6^\circ 5$. È curioso che T. e H. non abbiano invece osservato il punto di fusione della forma labile.

Noi abbiamo ripetuto le esperienze di Beckmann e possiamo confermarne i risultati. I due punti di congelamento $4^\circ 47$ e $4^\circ 0$ dati da lui sono però indubbiamente troppo bassi. Noi abbiamo trovato per la forma stabile $5^\circ 7$ (in perfetto accordo con T. e H. che danno $5^\circ 71$) e per quella labile $5^\circ 23$. Lasciando intatti i valori di K_1 e K_2 trovati da B. si ricavano quindi i calori di fusione: $Q_1 = 10,8$ e $Q_2 = 11,3$. Il valore di trasformazione si dedurrebbe quindi $Q_3 = Q_2 - Q_1 = 0,5$.

(¹) Gazz. chim. ital., 1901, I, 409.

(²) Tammann, *Kristallisieren und Schmelzen*. Leipzig, 1903, pag. 278 e segg.

Vediamo come questi valori stiano d'accordo colla equazione di van't Hoff. Avremo: $T_1 = 273 + 5,7$, $T_2 = 273 + 5,2$, $T_3 = 273 - 6,5$. Supponiamo di conoscere solo $Q_1 = 10,8$ e di voler calcolare Q_2 e Q_3 ; per un semplice sviluppo dell'equazione succitata si ricava:

$$Q_3 = Q_1 \frac{\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}}{\frac{1}{T_3} - \frac{1}{T_2}} = 0,44$$

e quindi:

$$Q_2 = 10,8 + 0,44 = 11,24$$

da cui $K_2 = 137,7$. Si vede che la concordanza coi valori dati di sopra è delle più soddisfacenti.

Veniamo ora alle nostre esperienze colla *o. nitrobenzaldeide*. Questo corpo oltre alla forma solita che fonde a $43^{\circ},0$, ne presenta una seconda labile che si forma però assai facilmente dal liquido di fusione soprattutto quando questo sia soprariscaldato fino sopra 60° ; essa si deposita in lunghi aghi sottili che si distinguono assai bene dai cristallini dalla forma stabile e che fondono a $40^{\circ},4$.

In generale raffreddando lentamente la *o-nitrobenzaldeide* fusa, si ha un sopraraffreddamento abbastanza considerevole dopo il quale si formano i germi della forma labile ed il termometro salisce fino al punto di fusione di questa mantenendovisi fermo per alcun tempo; poi ricomincia a risalire, prima lentamente e poi più rapidamente verso il punto di congelamento della forma stabile, che però operando in tal modo difficilmente viene raggiunto. Volendo determinare con esattezza quest'ultimo bisogna introdurre fin dal principio un germe stabile; allora la temperatura sale subito e quand'anche si sia scesi al disotto del punto di fusione inferiore, questo viene oltrepassato senza sosta. L'ottenere letture esatte e concordanti è però tutt'altro che facile ed occorre una certa pratica prima di riuscirvi. Come corpi normali vi sciogliemmo la naftalina ed il difenile ed ottenemmo i seguenti risultanti:

Concentrazioni.	FORMA STABILE ($T_1 = 273 + 43^{\circ}$)		FORMA LABILE ($T_2 = 273 + 40^{\circ},3$)	
	Abbassam. term.	Depr. mol.	Abbassam. term.	Depr. mol.
	K_1		K_2	
Con naftalina, $C_{10} H_8 = 128$				
3,359	$1^{\circ},93$	73,5	$2^{\circ},03$	77
5,823	3,29	72	3,63	80
7,783	4,31	71	4,87	80
Con difenile, $C_{12} H_{10} = 154$				
3,556	$1^{\circ},70$	73,5	$1^{\circ},95$	82,5
6,141	2,91	73	3,15	81
8,184	3,77	71	3,97	75
	media $K_1 = 72$		media $K_2 = 79$	

Dai due valori K_1 e K_2 si calcolano pei calori di fusione delle due forme $Q_1 = 27,7$ e $Q_2 = 24,8$. La forma labile ha così una costante di abbassamento maggiore ed un calore di fusione minore di quelli della forma stabile, e si può quindi in base a quanto fu detto di sopra dedurre che si tratti di monotropia.

Della o-nitrobenzaldeide abbiamo anche cercato di determinare la velocità di cristallizzazione (K. G.) e vi siamo riusciti per la forma labile; come risulta dai numeri pubblicati più sotto essa è la sostanza organica più veloce che finora si conosca. Numero di germi (K. Z.) assai piccolo anche a bassa temperatura.

a 35,8: 10 mm. in 82''; K. G. = 7,3	a 28,0: 220 mm. in 17''; K. G. = 777
" 34,2: 40 " " 85 " 28,2	" 25,1: 100 " " 3,2 " 1875
" 32,2: 140 " " 84 " 100,0	" 24,8: 100 " " 2,8 " 2143
" 30,5: 120 " " 22 " 327,8	" 14,0: 100 " " 1,8 " 3333

La K. G. della forma stabile non si può determinare perchè a bassa temperatura si forma sempre prima la forma labile; quest'ultima poi si trasforma nell'altra, ma la velocità della trasformazione non può esser seguita perchè si produce un troppo gran numero di germi.

Un caso analogo a questo studiato da noi sarebbe l'altro del monocloruro di jodio studiato da Stortenbecker (loco citato). Quest'ultimo trovò con soluzioni di jodio per la forma α (p. d. fus. 27°,2) $K_1 = 112,5$ e quindi $Q_1 = 16$, per la forma β (p. d. fus. 13°,9) $K_2 = 117,6$ e quindi $Q_2 = 14$. Ciò starebbe in accordo con quanto venne dedotto e trovato da noi, poichè si tratta assai verosimilmente di monotropia. La notevole distanza fra i due punti di fusione deve però rendere assai labile la forma fondente più basso e difficile l'operare con essa. Infatti più tardi Oddo (1) non riuscì ad eseguire misure con quest'ultima, e trovò per la forma più stabile, numeri alquanto più bassi di quelli di Stortenbecker.

Consideriamo ora le curve di congelamento delle due modificazioni polimorfe in un diagramma in cui le ordinate indichino le temperature e le ascisse le concentrazioni. La fig. 3 rappresenta i fenomeni per i corpi enantiotropi e la fig. 4 per quelli monotropi: indichiamo in entrambe con $O_1 P_1$ la curva relativa alla forma fondente più alto, e con $O_2 P_2$ quella della forma che fonde più basso.

Sia ora MN la curva di solubilità di una sostanza qualunque che non dia soluzione solida. Si avranno in C_1 e C_2 i due punti criodratrici rispetto alle due modificazioni; si vede tosto che pei corpi monotropi C_2 (labile) corrisponde sempre ad una temperatura più bassa e ad una concentrazione mi-

(1) Gazz. chim. ital., 1901, II, 146.

nore di C_1 . (Almeno finchè si tratta di corpi aventi curve di solubilità con andamento normale e cioè più solubili a caldo che a freddo). La differenza

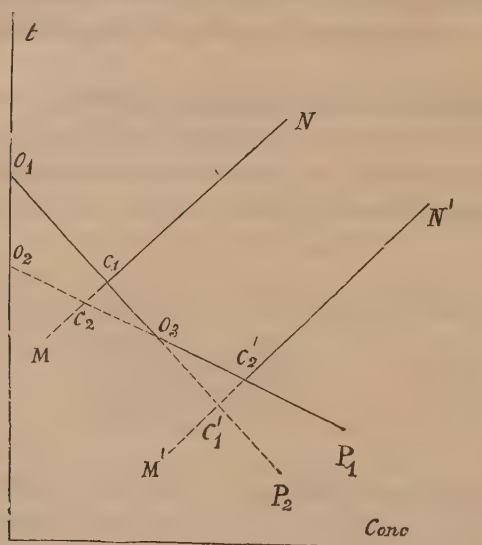


FIG. 3

di temperatura fra O_1 e C_1 non è però necessariamente minore di quella fra

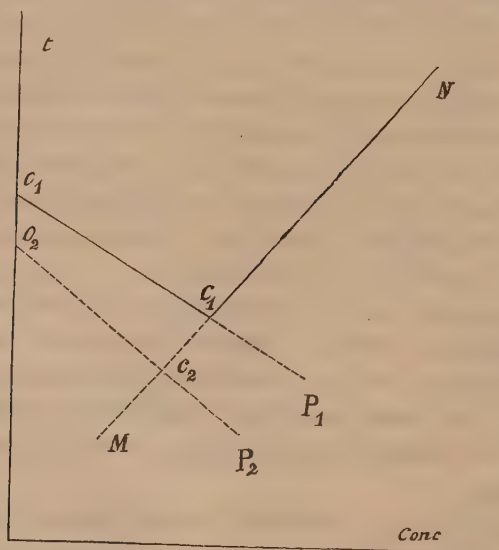


FIG. 4.

O_2 e C_2 , ma nel caso che MN sia molto inclinata sull'asse delle temperature, può anche essere maggiore.

Pei corpi enantiotropi la posizione relativa dei punti criodratrici resta la stessa di quella ora detta quando la curva MN tagli le curve di congelamento al disopra del punto di trasformazione O_3 . Se questa invece (come $M'N'$) le interseca al disotto di questo punto, il punto C'_2 (che è ora stabile) corrisponde a temperature e concentrazioni superiori a quelle riferentisi a C'_1 . In entrambi questi casi però la differenza di temperatura $O_1 - C_1$ (od $O_1 - C'_1$) è sempre maggiore di $O_2 - C_2$ (od $O_2 - C'_2$).

Determinazioni di punti criodratrici relativi ad entrambe le modificazioni di un corpo dimorfo erano finora state eseguite per alcuni sali idrati in acqua e per le due forme di JCl in presenza di iodio da un lato e di JCl_3 dall'altro; nessuna però in miscele in cui il corpo dimorfo funzioni da solvente. Noi abbiamo eseguito ed abbiamo ancora in corso di esecuzione alcune esperienze con joduro di metilene i cui risultati verranno pubblicati in modo particolareggiato in altro luogo.

In una prossima Nota considereremo i fenomeni che accadono quando il corpo disciolto formi soluzione solida con una sola o con entrambe le modificazioni del corpo dimorfo.

Chimica. — *Soluzioni solide fra nitro- e nitrosoderivati.*

Nota di G. BRUNI e A. CALLEGARI, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Sull'ossidazione del pirrolo ad imide maleica.*

Nota di G. PLANCHER e F. CATTADORI, presentata dal Socio G. CIAMICIAN ⁽¹⁾.

In una Nota presentata l'anno scorso a questa Accademia ⁽²⁾ abbiamo esposto i risultati dell'ossidazione del dimetilpirrolo asimmetrico colla miscela di Beckmann ⁽³⁾, che dà luogo alla formazione della imide citraconica o metilmaleica, ed abbiamo messo in relazione le nostre, colle ricerche di W. Küster sulla ematina ⁽⁴⁾ facendo rilevare come i fatti da noi scoperti

(1) Lavoro eseguito nel laboratorio di Chimica generale ed agraria della R. Università di Bologna.

(2) Questi Rendiconti, vol. XII, 1° sem., pagg. 10-13.

(3) Ann. der Chemie, 250-325.

(4) Berichte, XXXV, 2953.

costituissero una prova indiretta della costituzione degli acidi ematinici e dell'emopirrolo (¹).

Le difficoltà che si presentavano ad ottenere dei prodotti caratteristici di ossidazione dei corpi pirrolici, risiedevano in primo luogo nella loro facile resinificabilità cogli acidi, secondariamente nell'azione troppo inoltrata che essi subiscono cogli ordinari ossidanti. Di più era sempre difficile isolare piccole quantità di prodotti dalla massa notevole della miscela di ossidazione (²). La miscela di Beckmann invece offre doppiamente delle condizioni favorevoli; possiede un'azione ossidante limitata e permette di isolare facilmente i prodotti neutri o acidi della ossidazione mediante l'estrazione con etere.

A noi parve perciò che detto metodo fosse suscettibile di ulteriori applicazioni e potesse costituire un mezzo pronto ed appropriato per la diagnosi dei posti occupati dai radicali nel nucleo pirrolico, ben distinto da quelli già noti; abbiamo quindi continuato le nostre ricerche.

Non era invero da aspettarsi, a tutta prima, che il pirrolo si prestasse all'ossidazione senza preventivamente resinificarsi, per azione dell'acido solforico che contiene il reattivo, ma i risultati ottenuti col dimetilpirrolo ci hanno indotti a questo tentativo.

Riferiamo qui le nostre prime esperienze in proposito.

Trattando a lieve calore la miscela di Beckmann con pirrolo puro e distillato di fresco, il liquido si scalda spontaneamente e viene ridotto. Il pirrolo si aggiunge a piccole porzioni e senza interrompere l'operazione fino a che il suo odore, agitando, seguita a scomparire. Dopo aver aggiunto circa 10 cm. di pirrolo e 400 ccm. di miscela di Beckmann, essa è disseminata di grumetti bruni e possiede un colore nero-verdastro. Si tratta allora con etere e si sbatte vivamente in imbuto a robinetto; l'etere separato odora di acidi grassi inferiori e depone per concentrazione una sostanza cristallina. Se si ripete l'estrazione per dieci volte col quarto del volume della miscela di etere, il liquido resta esaurito. Gli estratti eterici filtrati e seccati, agitando con solfato di soda anidro polverizzato vengono riuniti. Condotti a secco per distillazione, abbandonano un residuo quasi completamente cristallino, colorato ancora in giallo verdastro, che si secca tenendolo nel vuoto sull'acido solforico per una giornata.

Nell'etere di petrolio è pochissimo solubile a freddo e a caldo, lo è nel benzolo discretamente, e molto nell'etere, nell'acqua nell'alcool e nell'etere acetico. Sciolto in quest'ultimo solvente, fu fatto ricadere su carbone animale secco al quale cedette la maggior parte delle sostanze coloranti che l'accompagnavano. Ne risultò una soluzione colorata in giallo. Ripetendo le cristal-

(¹) W. Küster. Blut und Galle; R. Meyer's Jahrbuch der Chemie XII (1902) 127. — N. Schultz, Chemische Zeitschrift III (1904) 168.

(²) Berichte XXXV, 2953.

lizzazioni, lo si ebbe alla fine sotto forma di bei cristalli bianchi, appena debolmente gialli, che fondono a 93°.

Sottoposto all'analisi esso diede i seguenti risultati:

In 100 parti

C	49.48
H	3.65
N	14.40

che corrispondono a quelli della formola



che richiede in 100 parti

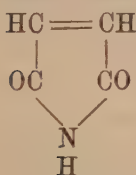
C	49.48
H	3.09
N	14.43

Questa formola appartiene appunto alla *imide maleica* che ancora non era nota.

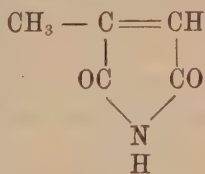
La sostanza può essere cristallizzata anche dal benzolo, o precipitando dalle soluzioni in etere acetico con etere di petrolio. Sublima facilmente e dà così delle belle scagliette tenuissime lucenti; può aversi per cristallizzazione in cristalli tabulari, e per evaporazione lenta del solvente in grossi cristalli prismatici. Possiede un sapore pizzicante ed i suoi vapori irritano le mucose del naso e degli occhi.

Il suo punto di fusione sta bene in serie colle sue omologhe già note; imide citraconica (1) e imide pirocinconica (2).

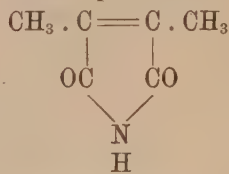
Imide maleica.



Imide citraconica.



Imide pirocinconica.



Essa dà con nitrato d'argento ammoniacale un precipitato cristallino che si separa dall'acqua bollente in belle scagliette incolori. Un piccolo saggio della sostanza trattato con acqua di bromo alla luce, dà per concentrazione un residuo che consta per la massima parte di cristalli bianchi, che, sciolti in alcool bollente, si separano in piumette od aghi, i quali fondono verso 226° come la imide bibromomaleica.

(1) Ciamician e Dennstedt, Gazz. Chim. ital., XIII, 501.

(2) Weidel, Monatshefte für Chem., 3, 610.

Tenendo conto di queste sue proprietà e raffrontando l'origine di questo corpo con quello dell'imide citraconica da noi già resa nota, siamo indotti a credere che essa sia veramente l'imide maleica. La reazione che avviene è la seguente:



Così questo nuovo caso viene a dimostrare che il comportamento della miscela di Beckmann sui corpi pirrolici e di natura generale e risolve il problema dell'ossidazione graduale di questi corpi, che finora non era riuscita, se non in via indiretta; e costituisce un metodo utile, quanto semplice, per la determinazione dei posti nel nucleo pirrolico e per stabilire se un corpo contiene questo complesso nucleare. Detto metodo è ben distinto da quello di Ciamician e Silber ⁽¹⁾, che consiste nella trasformazione del pirrolo e dei suoi derivati nelle cloro- e bromomaleinimmidi, e richiede la preventiva alogenazione e successiva ossidazione con acido nitrico, esigendo l'impiego di notevoli quantità di sostanze.

La preparazione poi dell'imide maleica viene a colmare una lacuna della chimica organica, con un corpo che deve prestarsi a numerose reazioni anche sintetiche. L'imide maleica rappresenta infatti il chinone nella serie pirrolica



e indubbiamente deve presentare con questo delle analogie che non mancheremo di studiare. Inoltre essa, per la mobilità dei suoi idrogeni, potrà dare numerosi derivati e chiarire la costituzione di corpi già conosciuti.

Abbiamo in corso altre esperienze anche con altri ossidanti ed altri corpi, che presumibilmente contengono il nucleo del pirrolo ed a suo tempo ne riferiremo i risultati.

(¹) Ciamician, *Il pirrolo e i suoi derivati*, Roma, 1888, pag. 20.

Fisiologia. — *Il ricambio respiratorio delle cavie sulla vetta del Monte Rosa.* Nota del dott. A. AGGAZZOTTI ⁽¹⁾, presentata dal Socio A. MOSSO.

Il giorno 4 di agosto partimmo da Torino per Alagna (m. 1180 sul livello del mare); quivi dovemmo rimanere 8 giorni per far trasportare le casse e gli apparecchi alla capanna Regina Margherita: durante questi giorni le cavie che avevamo prese con noi, non poterono venire governate col regime secco, ma fu loro dato anche erba fresca, carote ecc. Il giorno 12 e 13 furono trasportate alla capanna Regina Margherita nell'altitudine di 4560 m., e subito venne ripreso il regime che avevano a Torino. Nessun fenomeno fece supporre che esse avessero sofferto pell'aria rarefatta. Nella capanna furono messe in una cassa di legno di circa un metro di lunghezza e mezzo metro di larghezza, che veniva tenuta nella cucina, che era l'ambiente più riparato e più caldo.

Solamente il giorno 22 agosto, cioè dieci giorni dopo che le cavie si trovavano sul Monte Rosa, feci la presente serie di ricerche. La tecnica fu rigorosamente la stessa che a Torino. Gli esperimenti erano fatti nella cucina medesima, alla temperatura di 18° o 20° gradi. Però l'aria che doveva passare sotto alla campana non poteva essere quella della cucina, perchè questo era un ambiente ristretto e poco ventilato, perciò essa veniva presa direttamente dall'esterno, mediante un tubo di gomma di grosso calibro che usciva per un foro dalla finestra. Il detto tubo era lungo due metri circa e lung'esso l'aria si riscaldava, di guisa che sotto alla campana la temperatura oscillava come a Torino fra 19° e 20°. Era assai importante che la temperatura nelle due serie di esperienze fosse sempre la stessa, perchè le sue variazioni avrebbero per sè stesse fatto variare l'intensità degli scambi respiratori, indipendentemente dalla pressione. Infatti Falloiset ⁽²⁾ trovò questa influenza marcatissima nelle cavie; esse a 7° eliminavano quasi la metà di CO₂ che a 19°; mentre che se la temperatura s'innalzava sopra i 19° o 21° cent., allora il CO₂ aumentava invece di diminuire.

Sul Monte Rosa feci otto esperienze riassunte nella tavola II.

(1) Lavoro eseguito nella quarta spedizione sul Monte Rosa diretta dal prof. A. Mosso.

(2) Falloiset, *Influence de la température extérieure sur les échanges respiratoires chez les animaux à sang chaud et chez l'homme.* Arch. de Biologie 1901, pag. 761.

TAVOLA II.

D ^a	Pressione	Temperatura	Analisi dell'aria respirata		p. % di CO ₂ elimin.	p. % di O ₂ consum.	cm ³ di CO ₂ elimin. in 1 m' a 0° e 76 mm.	cm ³ di O ₂ consum. in 1 m' a 0° e 76 mm.	Quoziente Resp.	cm ³ di CO ₂ elimin. in 1 m' a 0° e 76 mm.	cm ³ di O ₂ consum. in 1 m' a 0° e 76 mm.	gr. di CO ₂ elimin. per kilogramm-ora	gr. di O ₂ consum. per kilogramm-ora	Peso dell'animale
			p. % di CO ₂	p. % di O ₂										
22 VIII	440	18°	1,1405	19,376	1,1305	1,554	153,88	211,53	0,727	5,495	7,554	1,8417	1,8309	354
22 VIII	440	18	1,2400	19,353	1,2300	1,577	167,42	214,66	0,780	5,979	7,776	2,2378	2,0999	317
23 VIII	440,5	18	1,0795	19,682	1,0695	1,248	145,58	169,87	0,680	5,199	6,067	1,9582	1,6526	315
23 VIII	440,5	18,5	1,4907	19,036	1,4807	1,894	201,55	257,81	0,781	7,193	9,207	2,440	2,2571	350
24 VIII	439	19	1,0780	19,306	1,0680	1,624	145,37	221,05	0,657	5,192	7,894	1,7654	1,9830	311
25 VIII	440,3	19	1,5840	19,308	1,5240	1,622	207,44	220,79	0,939	7,408	7,885	2,7044	2,0818	325
25 VIII	440,3	18,2	1,4073	18,873	1,3973	2,057	190,20	280,00	0,679	6,792	9,999	2,2018	2,3441	336
26 VIII	440	19	1,1805	19,235	1,1205	1,695	152,52	230,72	0,661	5,447	8,240	1,7641	1,9749	358
Medie			1,2625	19,271	1,2525	1,659	170,49	225,8	0,738	6,088	8,077	2,1142	2,0282	340

Se confrontiamo le medie delle esperienze di Torino, con quelle fatte sul Monte Rosa (raccolte nella tavola III), tenendo calcolo dell'aumento in peso delle cavie, vediamo che la differenza fra l'acido carbonico eliminato e l'ossigeno consumato, è minima.

TAVOLA III.

	Pressione	cm ³ di CO ₂ dim. in 28' non ridotti	cm ³ di O ₂ cons. in 28' non ridotti	cm ³ di CO ₂ elim. in 28' ridotti a 0° e 76 mm.	cm ³ di O ₂ cons. in 28' ridotti a 0° e 76 mm.	Q. R.	gr. di CO ₂ elimin. per kilogramm-ora	gr. di O ₂ consum. per kilogramm-ora	Peso delle cavie
A Torino	745	168,66	231,37	152,01	210,54	0,723	2,0238	2,0321	317
Sul Monte Rosa	440	313,66	415,46	170,49	225,80	0,738	2,1142	2,0282	340
Differenza	305	145,0	184,09	18,48	15,26	0,015	0,0904	0,0039	23

Infatti a Torino una cavia elimina grammi 2,0238 di CO_2 e consuma gr. 2,0321 di O_2 e sul Monte Rosa gr. 2,1142 di CO_2 e gr. 2,0282 di O_2 per Kilogramm-ora cioè appena il 4,4669 % di CO_2 in più e il 0,19191 % in meno di O_2 . Il quoziente respiratorio è rimasto pressapoco invariato.

I limiti entro i quali oscillano i singoli risultati, sono piuttosto ampi ed in parte si compenetrano, ma i valori massimi delle esperienze di Torino non oltrepassano i valori massimi di quelle fatte al Monte Rosa e i valori minimi di queste, sono superiori ai valori minimi di quelle.

Il debole aumento nell'intensità degli scambi respiratori, sul Monte non può dipendere dalla maggiore età che avevano le cavia in confronto di quando si fecero le esperienze a Torino; Mayer ⁽¹⁾ dimostrò in questi stessi animali, che, allo stato di riposo, l'intensità degli scambi respiratori per Kilogram-ora cade rapidamente nei primi giorni di vita, ma che dopo il terzo mese le combustioni organiche rimangono invariate.

Se ora confrontiamo i risultati di queste esperienze con quelli che gli altri sperimentatori ebbero studiando il ricambio respiratorio a grandi altezze, vediamo che Schumburg e N. Zuntz ⁽²⁾, facendo su loro stessi varie serie di esperienze, prima a Berlino (42 m.), poi a Zermatt (1632 m.) e alla Betemphütte (2800 m.) e finalmente sul Monte Rosa (4560 m.), trovarono, un aumento dell'ossigeno consumato e dell'anidride carbonica emessa, specialmente in Schumburg. Però l'aumento del CO_2 era così debole che si poteva sufficientemente spiegarlo coll'aumentata attività respiratoria: e ne conclusero che l'aria rarefatta non aveva nessun effetto sul chimismo respiratorio. Altri ricercatori ebbero dei risultati molto diversi: Jaquet e Stähelin ⁽³⁾ fecero delle esperienze sul proprio ricambio respiratorio prima a Basel (270 m.) poi a Chasseral (1600 m.) indi nuovamente a Basel, e contemporaneamente determinarono l'azoto eliminato per togliere gli errori che potevano derivare da un cambiamento di vita e di alimentazione. Essi trovarono che la quantità dell'aria respirata rimaneva nel riposo pressapoco costante, mentre se si riducevano i rispettivi volumi a 0° e 760 mm. di HG la quantità di aria respirata nell'unità di tempo era minore a Chasseral che a Basel, confermando così le esperienze che aveva fatto A. Mosso ⁽⁴⁾ sul Monte Rosa. Trovarono inoltre un aumento del 14,8 % nel CO_2 eliminato e del 8,8 % nel O_2 consumato; anche nelle loro esperienze i valori minimi trovati a Chasseral non superavano tutti i valori massimali delle esperienze fatte a

(1) Mayer, *Sur les modifications du chimisme respiratoire avec l'âge, en particulier chez le cobaye*. Comp. Rend. de l'Acad. de Science, 1903, pag. 137.

(2) Schumburg und N. Zuntz, *Zur Kenntnisse der Einwirkungen des Hochgebirges auf den menschlichen Organismus*. Pflügers Arch. 1896, pag. 471.

(3) Jaquet e Stähelin, v. loc. cit.

(4) A. Mosso, *La fisiologia dell'uomo sulle Alpi*. Milano, 1898, pag. 39.

Basel, ma fatte poche eccezioni, essi erano sempre superiori alle medie di queste ultime.

A. Loewy, Y. Loewy e L. Zuntz ⁽¹⁾ riscontrarono alla capanna Gniffetti (3620 m.) un aumento del 20 % nel O₂ consumato in Y. Loewy, e in L. Zuntz già al Col d'Olen l'ossigeno consumato era aumentato del 21,5 %, mentre A. Loewy non presentò alcun mutamento. L'anidride carbonica emessa era pure aumentata e proporzionalmente all'ossigeno per cui il quoziente respiratorio non mutò affatto.

Sotto alla campana pneumatica A. Loewy ⁽²⁾ fece molte esperienze pure sul ricambio respiratorio completo, arrivando alla conclusione che solo ad una rarefazione superiore a 450 mm. oppure ad una tensione parziale di ossigeno del 10 % si notava un aumento del CO₂ emesso e del O₂ consumato, questo poi in proporzioni minori dell'altro per cui il quoziente respiratorio risultava aumentato.

Ma nella letteratura si trovano molti altri ricercatori che studiarono solo parzialmente il ricambio respiratorio sull'uomo, sia direttamente sulle montagne sia in gabinetti pneumatici; di questi non farò, per essere più breve, che ricordare i risultati dei loro studi: Mermod ⁽³⁾, Marcet ⁽⁴⁾, Veragut ⁽⁵⁾, Burgi ⁽⁶⁾, Mosso e Marro ⁽⁷⁾ trovarono tutti, chi più chi meno, un aumento dell'anidride carbonica emessa dall'uomo in riposo sotto l'azione dell'aria rarefatta.

Invece Liebig ⁽⁸⁾, Coindet ⁽⁹⁾, e Tissot ⁽¹⁰⁾ non riscontrarono alcun

(1) A. Loewy, Y. Loewy und L. Zuntz, *Ueber den Einfluss der verdünnten Luft und Höhenclimas auf den Menschen*. Pflügers Arch., 1897, pag. 477.

(2) A. Loewy, *Untersuchungen über die Respiration und Circulation*. Berlin, 1895.

(3) Mermod, *Bulletin de la Société Vaudoise des sciences nat.* 1877. *Nouvelles recherches physiologiques sur l'influence de la dépression atmosphérique sur l'habitant des montagnes*.

(4) Marcet, *Summary of an experimental Inquiry into the function of respiration at various altitudes*. Proc. of Royal Soc. of London XXVII, 1878; *A summary of an Inquiry into the function of respiration on the Island and Peak of Tenecriffa* Proc. Royal Soc. of London XXVIII, 1879.

(5) Veragut, *Le climat de la Haute-Engadine et son action physiologique*. Thèse, Paris, 1887.

(6) Burgi, *Der respiratorische Gaswechsel bei Ruhe und Arbeit auf den Bergen*. Arch. f. Anat. u. Physiol. (Physiol. Abt.), 1900.

(7) Mosso e Marro, *L'acapnia prodotta nell'uomo dalla diminuita pressione barometrica*. R. Accad. dei Lincei, 1° sem., 1903, pag. 453.

(8) Liebig, *Sitzungsber der Gesellsch. f. Morph. u. Physiol.* München, 1891.

(9) Coindet, *Gazette hebdom* 1863: criticato da Jourdanet, *Influence de la pression de l'air sur la vie de l'homme*. Paris, 1875.

(10) Tissot, *Recherches expérimentales sur l'action de la décompression sur les échanges respiratoires de l'homme*. Compt. Rend. de l'Accad. de Science, 1902, pag. 1255.

cambiamento nei processi di combustione nell'aria rarefatta. U. Mosso ⁽¹⁾ anzi trovò una diminuzione dei detti processi.

Fra quelli che cercarono studiare l'importante problema dell'azione dell'aria rarefatta per mezzo di ascensioni aereostatiche, abbiamo Hallion e Tissot ⁽²⁾, Schroetter e Zuntz ⁽³⁾ che trovarono, i primi due autori, un aumento evidente degli scambi respiratori, gli altri due soltanto un piccolissimo rinforzo, spiegabile coll'aumentata attività dei movimenti respiratori. Robin ⁽⁴⁾ trovò invece solo un aumento dell'ossigeno consumato, e una diminuzione nell'acido carbonico eliminato, per cui il quoziente respiratorio ne era abbassato.

Tutti questi ricercatori fecero, come ho detto, delle esperienze sull'uomo; sugli animali la maggior parte delle ricerche furono fatte diminuendo la tensione parziale dell'ossigeno nell'aria inspirata, così Friedländer e Herter ⁽⁵⁾ che ricercarono solamente l'azione dell'O₂ a bassa tensione, senza variazioni di pressione sul ricambio respiratorio dei cani: essi mediante un sistema di valvole facevano respirare a dei cani tracheotomizzati una miscela di idrogeno ed aria: raccoglievano poi l'aria aspirata in gazometri e la analizzavano. In questo modo essi trovarono che fino ad una tensione parziale dell'ossigeno di 12,7 % non si aveva nessun cambiamento nei processi chimici della respirazione; ma ad una riduzione maggiore diminuiva l'assorbimento del O₂, mentre la produzione dell'acido carbonico rimaneva quasi invariata. Kempner ⁽⁶⁾ fece pure delle esperienze su dei gatti e dei conigli, sottoponendoli per un'ora all'azione del O₂ a bassa tensione, e vide che l'O₂ bruciato era minore se questo nell'aria inspirata era contenuto soltanto nel 13-17 %. Negli uccelli però egli non potè riscontrare quest'azione. Ma poichè i movimenti degli animali durante l'esperienza potevano per sè soli variare il ricambio respiratorio, Kempner ⁽⁷⁾ fece un'altra serie di ricerche curarizzando gli animali e facendo poi la respirazione artificiale anche

(1) U. Mosso, *La respirazione dell'uomo sul Monte Rosa*. Eliminazione del CO₂ a grandi altezze. Rend. Accad. dei Lincei, 1° sem. 1896.

(2) Hallion e Tissot, *Recherches expérimentales sur l'influence des variations rapides d'altitude sur le phénomènes chimiques et physiques de la respirations à l'état de repos*. Comp. Rend. de la Soc. de Biologie, 1901, pag. 1030.

(3) H. v. Schroetter und N. Zuntz, *Ergebnisse zweier Ballonfahrten zu physiologischen Zwecken*. Pflügers Arch. Bd 92, 1902.

(4) A. Robin, *Échanges respiratoires aux hautes altitudes*. Bulletin de l'Accad. de Médecine, 1901, pag. 644.

(5) Friedländer e Herter, *Ueber die Wirkung des Sauerstoffmangels auf den Thier-Organismus*. Zeitschr. f. physiol. Chem. tomo 3, 19, 1879.

(6) Kempner, *Ueber den Einflussmässiger Sauerstoffverarmung auf den Sauerstoffverbrauch der Warmbluter*. Virchows Arch. 89-290. 1882.

(7) Kempner, *Neue Versuche ueber den Einflusse der Sauerstoffgehaltes der Einatmungsluft etc*. Arch. f. Anat. u. Phys. Abt. 1884, 396.

qui trovò una rilevante diminuzione di O_2 consumato quando la tensione parziale era appena del 18 %. Ma in queste esperienze v'è una evidente azione del curaro sugli scambi respiratori. Anche poco attendibili secondo Loewy sono le esperienze di v. Hösslin ⁽¹⁾; sui topi egli avrebbe anche trovato un rilevante abbassamento del O_2 consumato quando si diminuisca la tensione parziale dell' O_3 nell'aria.

P. Bert studiò gli animali nell'aria rarefatta, ma solo sotto alla campana pneumatica; egli ne esaminò varie specie e trovò che ad una pressione di soli $2/3$ di atmosfera avveniva una diminuzione nell'ossigeno consumato, e nell'acido carbonico emesso: questo fatto diveniva molto più evidente ad una pressione di $1/3$ di atmosfera. Ma il metodo e la tecnica di P. Bert non sono esatti come dimostrò Speck ⁽²⁾ onde non possiamo porre fede ai suoi risultati. Più importanti sono le esperienze che P. Regnard ⁽³⁾ fece sulle tortore che sottoponeva tutti i giorni per un'ora all'azione dell'aria rarefatta, egli notò in esse un'istantanea diminuzione nella produzione del CO_2 : ma a poco a poco questa si ripristinava e dopo 5 o 6 giorni era ritornata normale. Nei giorni successivi la produzione del CO_2 continuava a crescere sorpassando i valori normali.

Dalla letteratura dell'argomento, che fu raccolta da Otto Cohnhein ⁽⁴⁾ e dagli scritti che ho citato si vede come non possiamo con sicurezza asserire, se il ricambio respiratorio dell'uomo nell'aria rarefatta subisca una variazione, oppure se esso rimanga invariato. Ciò che risulterebbe, mi pare, sia il fatto che fra i diversi uomini studiati esistano delle profonde differenze individuali. Queste differenze risultano evidentissime nel lavoro di A. Loewy, J. Loewy e L. Zuntz: perciò i risultati sarebbero solo in apparenza tanto contraddittori e le differenze dipenderebbero in gran parte dal diverso modo di reagire degli individui studiati.

Sugli animali abbiamo poche esperienze e nessuno, se non erro, ha fino ad ora studiato il ricambio respiratorio direttamente sull'alta montagna. Dalle mie esperienze risultò che anche nelle cavie esistono differenze individuali, in alcune cavie infatti trovammo che il ricambio respiratorio sul Monte Rosa aveva subito un fortissimo aumento, mentre in altre esso rimase invariato.

Però, nonostante queste differenze individuali, noi abbiamo veduto dalle medie della Tav. III, che vi è realmente un aumento, benchè non molto

(1) Hösslin, *Ueber den Einfluss der Sauerstoffspannung im Gevebe auf den Sauerstoffverbrauch*. — Sitzungsber. der Ges. f. Morph. u. Phys. München, 1891.

(2) Speck, *Wirkung des O-Gehalts der Luft auf die Atmung des Menschen*. Zeitschrift f. klin. Medizin Bd. 12.

(3) Regnard, *Cure d'Altitude*. 1897, Paris.

(4) L. Asher und K. Spiro, *Ergebnisse der Physiologie*, Wiesbaden, 1903, pag. 633, Zweiter Jahrgang, I Abtheilung.

forte, dell'acido carbonico eliminato; mentre l'ossigeno consumato è rimasto quasi invariato. Anche da tutte le esperienze fatte sull'uomo se ne facciamo una media approssimativa, sembrerebbe vi sia un rinforzo degli scambi respiratori, specialmente nell'eliminazione del CO_2 .

I mutamenti osservati nei gas del sangue da A. Mosso e G. Marro ⁽¹⁾ sul Monte Rosa e la diminuzione notevole dell'alcalinità del sangue, trovata dal Galeotti ⁽²⁾ in tutti gli animali che facevano parte della nostra spedizione, ci indicano alcuni dei mutamenti chimici che subisce l'organismo per effetto della depressione barometrica, e possono sufficientemente esplicitare l'aumento dell'acido carbonico emesso al Monte Rosa.

Per Regnard le variazioni del chimismo respiratorio sarebbero un semplice fenomeno di adattamento dell'organismo alle nuove condizioni esterne; e per molti questo adattamento si accompagnerebbe ad un aumento nel numero dei globuli rossi del sangue; ma C. Foà ⁽³⁾ ultimamente sul Monte Rosa trovò che l'iperglobulia è soltanto apparente e periferica.

Pare accertato che nell'uomo l'azione dell'aria rarefatta si prolunghi anche dopo ritornati alla pressione normale. Robin ⁽⁴⁾ vide che dopo una ascensione aereostatica il chimismo respiratorio non si ripristinava subito. Jaquet e Stähelin trovarono che l'azione del clima dell'alta montagna si prolungava per molto tempo dopo il soggiorno nell'aria rarefatta e che perciò non si poteva pensare ad un semplice fenomeno di accomodazione. Per gli autori sopra citati, l'azione dell'aria rarefatta sarebbe duplice: prima produrrebbe un aumento nelle ossidazioni e nel quoziente respiratorio, in secondo luogo produrrebbe una diminuzione nella distruzione degli albuminoidi, con formazione di tessuti azotati.

L'aumento in peso rilevato nelle cavie sul Monte Rosa può trovare nell'asserzione di Jaquet e Stähelin la sua esplicitazione. Quelli che avevano fatto esperimenti con degli animali sotto alla campana pneumatica avevano notato una diminuzione di peso, ma molto probabilmente essa si sarebbe verificata pure se la pressione fosse rimasta normale. Le osservazioni di Veragut sui villeggianti delle montagne di S. Moritz avevano mostrato che succedeva saltuariamente una variazione di peso nei due sensi, ma trattandosi di persone assai diverse per costumi e genere di vita, non si poteva concludere nulla.

⁽¹⁾ A Mosso e G. Marro, *Le variazioni che succedono nei gas del sangue sulla vetta del Monte Rosa*. Rend. R. Accad. Lincei, 1° sem. 1903.

⁽²⁾ G. Galeotti, *Le variazioni dell'alcalinità del sangue sulla vetta del Monte Rosa*. Rend. R. Accad. Lincei, 2° sem. 1902.

⁽³⁾ C. Foà, *Critica sperimentale delle ipotesi ammesse per spiegare l'iperglobulia dell'alta montagna*. Rend. R. Accad. dei Lincei, 2° sem. 1903; pag. 403.

⁽⁴⁾ Robin, loc. cit.

Dalle esperienze che feci al Monte Rosa nella Capanna Regina Margherita si può concludere che :

1°. *Nell'unità di tempo e di peso, sotto l'azione dell'aria rarefatta vi è un leggiero aumento dell'acido carbonico espirato dalle cavie; mentre l'ossigeno assorbito rimane costante.*

2°. *Per l'azione dell'aria rarefatta, esistono delle fortissime differenze individuali.*

3°. *Soggiornando nell'aria rarefatta gli animali aumentano di peso.*

Botanica. — *Sullo streptococcus Bombycis Flügge, e sui rapporti del filugello.* Nota di CAMILLO ACQUA, presentata dal Socio R. PIROTTA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario CERRUTI presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle dei soci CELORIA, TARAMELLI, del Corrispondente BASSANI e del Socio straniero ZIRKEL. Richiama inoltre l'attenzione della Classe su di un volume contenente le *Ricerche sperimentali eseguite negli anni 1901-1903 nell'Istituto di chimica generale della R. Università di Padova*, sotto la direzione del Corrispondente NASINI, e sulle pubblicazioni seguenti: *Obras de Mathematica*, vol. I, del dott. F. GOMES TEIXEIRA, pubblicate per ordine del Governo portoghese, dono dell'Accademia politecnica di Porto; *Atlas de photographies solaires*, 1° fascicolo, dell'Osservatorio d'astronomia fisica di Parigi; *Catalogue photographique du Ciel*, dell'Osservatorio di Algeri.

Il Vicepresidente BLASERNA presenta due volumi relativi alla *Zoologia*, del Catalogo internazionale della letteratura scientifica.

COMITATO SEGRETO

La Classe approva la relazione presentata dai soci CANNIZZARO, CIAMICIAN, KOERNER e MENOZZI, relatore, su di un concorso a premio bandito dalla Federazione italiana dei Consorzi agrari di Piacenza.

CORRISPONDENZA

Il Segretario CERRUTI dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

La R. Società zoologica di Amsterdam; la R. Società geografica di Londra; la Società geologica di Sydney; la Società zoologica di Tokyo; il R. Istituto geologico di Stockholm; l'Istituto Smithsonian di Washington; le Università di Glasgow e di Upsala; gli Osservatorii di Cambridge e di San Fernando.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 1° maggio 1904.

Achiardi (D') G. -- Forme cristalline del Berillo Elbano. Pisa, 1904. 8°.

Alfani G. — Sui movimenti vibratorî di una torre. — Osservazioni ed esperienze. Pavia, 1904. 8°.

Aloisi P. — Roccie dell'isola Dissei (Colonia Eritrea). (Atti della Società Toscana di scienze nat. Genn. 1904). 8°.

Assereto U. — La data della nascita di Colombo accertata da un ms. nuovo. Spezia, 1904. 8°.

Bassani F. — Gaetano Giorgio Gemmellaro. Commemorazione. (Rend. della R. Acc. delle Scienze fis. e mat. di Napoli, fasc. 3° marzo 1904). Napoli, 1904. 8°.

Berlese A. — Acari nuovi (*Manipulus secundus*) Estr. dal « Redia ». Vol. I, fasc. 2°, 1903). Firenze, 1904. 8°.

Celoria G. — Sull'epistolario di Alessandro Volta esistente presso il R. Istituto Lombardo. Nota. Milano, 1904. 8°.

Chelussi J. — Alcune osservazioni preliminari sul gruppo del Monte Velino e sulla conca del Fucino. (Atti della Soc. ital. di Scienze nat. vol. XLIII). Milano, 1904. 8°.

Faccin F. — I calcoli di riduzione delle fotografie stellarie per la zona di Catania ($+46^{\circ}$ e $+55^{\circ}$) ed il catalogo delle stelle fondamentali per la stessa zona. (Rivista di fisica, mat. e scienze nat. di Pavia. Marzo, 1904, n. 51). Pavia, 1904. 8°.

Id. — L'Eliocronometro « Faccin ». Schio, 1904. 8°.

Id. — La grande perturbazione magnetica del 31 ott. 1903 e l'attività solare. (Rivista di fisica, mat. e sc. nat. di Pavia. Genn. 1904, n. 49). Pavia, 1904. 8°.

Istituto di Chimica generale della R. Università di Padova. Ricerche sperimentali eseguite negli anni 1901-1903. Padova, 1904. 8°.

Lohest M., Habets A. et Forir H. — La Géologie et la reconnaissance du terrain houillier du Nord de la Belgique. Liège, 1904. 8°.

- Lussana S.* — Proprietà termiche dei solidi e dei liquidi. (Nuovo Cimento, fasc. di marzo 1903). Pisa, 1903. 8°.
- Notarisia (La Nuova).* Rassegna consacrata allo studio delle Alghe, ecc. (Serie XV, anno XIX dalla fondazione della « Notarisia ». Aprile 1904). Modena, 1904. 8°.
- Pflüger E.* — Fortgesetze Untersuchung über den Glykogengehalt der foetalen Leber und die Jodreaction des Glykogenes. (Physiol. Laboratorium in Bonn). Bonn, 1904. 8°.
- Pretto (De) P.* — Ipotesi dell'Etere nella vita dell'Universo. (Con prefazione del Senatore G. Schiaparelli). Venezia, 1904. 8°.
- Report of the South African Association for the Advancement of Science—First meeting. Cape Town, 1903. 8°.
- Ricerche sperimentali eseguite negli anni 1901-1903 nell'Istituto di Chimica Generale della R. Università di Padova. Padova, 1904. 8°.
- Romiti G.* — Discorso inaugurale pronunziato il 13 settembre 1903 nel IV Convegno zoologico in Rimini. (Dal Monitore Zool. Ital. Dic. 1903). Firenze, 1903. 8°.
- Id.* — Per la storia del Tessuto Connettivo Reticolare. (Dal Giorn. ital. delle Scienze mediche, n. 1). S. l. ed a. 8°.
- Salmoiraghi F.* — Sullo studio mineralogico delle sabbie e sopra un modo di rappresentarne i risultati. (Atti della Soc. ital. di Scienze nat. vol. XLIII). Milano, 1904. 8°.
- Taramelli T.* — Delle condizioni geologiche dei due tracciati ferroviari per Rigoroso e per Voltaggio tra Novi e Genova. (Rend. del R. Ist. Lomb. di Sc. e Lett. vol. XXXVII, 1904). Milano, 1904. 8°.
- Teixeira F. G.* — Obras sobre Mathematica. Vol. primeiro. Coimbra, 1904. 4°.
- Vavasseur (Le) R.* — Énumération des groupes d'opérations d'ordre donné. Paris, s. a. 4°.
- Zirkel F.* — Ueber Urausscheidungen in Rheinischen Basalten. (XXVIII B. der Abhandl. der math.-phys. Klasse der K. Säch. Gesellsch. der Wissensch. n. III). Leipzig, 1903. 8°.
- Zur Frage der Einführung einer internationalen Verkehrssprache. Graz, 1904. 8°.

DISSERTAZIONI ACCADEMICHE
DELLE UNIVERSITÀ DI HEIDELBERG, KIEL.

I. — HEIDELBERG,

- Behrs S.* — Beitrag zur Casuistik der aus angeborenen Melanosen des Auges hervorgehenden Tumoren. Heidelberg, 1903. 8°.
- Bergdolt B.* — Ueber das Verhalten einiger organischer Verbindungen bei höheren Temperaturen und bei Gegenwart von Kontaktsubstanzen. München, s. a. 8°.

- Bettges W.* — Quantitative Bestimmungen und Trennungen durch Hydrazinsalze. Heidelberg, 1902. 8°.
- Bloch F.* — Ueber die Einwirkung des Wassers auf anorganische Salze. Heidelberg, 1903. 8°.
- Blum H.* — Das Bevölkerungsproblem im Stillen Weltmeer. Berlin, 1902. 8°.
- Bohe W.* — Die Reduktion von Oximen auf elektrolytischen Wege und die Homologen des Benzylamins. Heidelberg, 1902. 8°.
- Bohn R.* — Ein Beitrag zur Kenntnis aromatischer Aldehyde. Heidelberg, 1902. 8°.
- Bollenbach H. F.* — Ueber die Einwirkung von Hydrazinhydrat auf 2, 4 Dinitrobenzoesäure. Heidelberg, 1902. 8°.
- Bucher K.* — Ueber genu valgum und seiner Behandlung, Heidelberg, 1903. 8°.
- Charasoff G.* — Arithmetische Untersuchungen über Irreduktibilität. Heidelberg, 1902. 8°.
- Fellenz J. A.* — Ueber Xerostomie. Heidelberg, 1903. 8°.
- Fischler F.* — Ueber dem Fettgehalt in Niereninfarcten zugleich ein Beitrag zur Frage der Fettdegeneration. Berlin, 1902. 8°.
- Flaecher F.* — Ueber p-Methoxyphenyllutidin und p-Methoxyphenyllutidindincarbonsäure. Heidelberg, 1903. 8°.
- Fox M.* — Kondensation von aliphatischen Aldehyden mit Malonsäure und Cyanessigsäure bei Gegenwart organischer Basen. Heidelberg, 1903. 8°.
- Garrett H.* — Ueber die Viskosität und den Zusammenhang einiger Colloid-Lösungen. Heidelberg, 1903. 8°.
- Goldschmidl F.* — Zur Aetiologie der Schrumpfniere. Heidelberg, 1903. 8°.
- Gutmann L.* — Ueber Abkömmlinge der (bb₁) Diazole. Heidelberg, 1902. 8°.
- Gutmann P.* — Ueber den Hydrazimocarbonester. Heidelberg, 1903. 8°.
- Haack O. H. A.* — Zur Kenntnis des Methylenaminoacetonitrils. Heidelberg, 1903. 8°.
- Hadlich R.* — Ein Fall von Tumor cavernosus des Rückenmarks mit besonderer Berücksichtigung der neueren Theorien über die Genese des Cavernoms. Cassel, 1902. 8°.
- Hahn H.* — Eine neue Methode zur Gewinnung alkylierter Benzolkohlenwasserstoffe. Heidelberg, 1903. 8°.
- Hanfland F.* — Dynamische Untersuchungen über Einführung einer Alkylgruppe. Heidelberg, 1902. 8°.
- Hassel K.* — Quantitative-Trennungen durch Persulfat in saurer Lösung. Heidelberg, 1903. 8°.
- Hildenstab E.* — Magenerkrankungen bei Cholelithiasis. Heidelberg, 1903. 8°.
- Holzer W.* — Ueber Albuminurie im Kindesalter. Heidelberg, 1903. 8°.
- Hütwohl K.* — Ueber die Fälle von Strumitis nach den Beobachtungen der Heidelberger chirurgischen Klinik aus dem Jahren 1897-1901. Heidelberg, 1902. 8°.

- Jacobsthal F.* — Ueber Diamidosäuren aus α -Dichlorundecylsäure. Heidelberg, 1903. 8°.
- Jahn A.* — Neue Reduktionsmethoden zur quantitativen Bestimmung der Halogene in Chloraten, Bromaten und Jodaten. Heidelberg, 1903. 8°.
- Jost E.* — Parallaxenbestimmungen aus Durchgangsbeobachtungen im Meridian. Karlsruhe. 1903. 4°.
- Kaestel R.* — Die angeborene Verlagerung der Niere in ihrer praktischen Bedeutung. Heidelberg, 1903. 8°.
- Klaiber E.* — Ueber das Verhalten einiger sekundärer Säurehydrazide vom Typus des Dibenzhydrazids und Phtalhydrazids gegen alkalische Oxydationsmittel. Heidelberg, 1902. 8°.
- Korte R.* — Ueber die Reduktion von p-Isopropylbenzalazin (Cuminaldazin) in alkalischer Lösung. Heidelberg, 1903. 8°.
- Kraft L.* — Studien in der Pyrazol- und Pyridinreihe. Heidelberg, 1902. 8°.
- Küster H. A.* — Ueber den Durchgang von Bakterien durch den Insekten-darm. Heidelberg, 1902. 8°.
- Lange A. E.* — Ueber die Additionsfähigkeit des Dimethyl-1-3-cyclohexanon-5. Heidelberg, 1902. 8°.
- Löffler G.* — Ueber kleine abgekapselte Empyeme im Kindesalter. Heidelberg, 1902. 8°.
- Lotterhos G. W.* — Zur Kenntnis der aromatischen Aldehyde. Heidelberg, 1902. 8°.
- Malzi J.* — Ueber ein Gesetz der elektrolytischen Reduktion. Darmstadt, 1903. 8°.
- Marangolo* — Ueber die Einwirkung von Hydrazinhydrat auf m-Xylylmalonsäurediäthylbesten. Heidelberg, 1902. 8°.
- Margolinsky S.* — Synthese von Betainen aus dialkylierten Aminoacetonitrilen. Heidelberg, 1903. 8°.
- Mayer F.* — Ueber Metaxylobenzylhydrazin. Heidelberg, 1892. 8°.
- Mayer M.* — Ueber die Einwirkung von Hydrazinhydrat auf 1, 2, 4 Dinitrophenylhydrazin. Heidelberg, 1902. 8°.
- Miltsh O.* — Ueber die Einwirkung von Luftsauerstoff auf Alkyläther. Heidelberg, 1903. 8°.
- Morisse R.* — Ueber die Addition von schwefliger Säure an ungesättigte Verbindungen. Heidelberg, 1903. 8°.
- Muckermann E.* — Ueber die Einwirkung von Hydrazinhydrat auf Bernsteinsäuremonoäthylester, Succinaminsäure und Succinamid. Heidelberg, 1902. 8°.
- Münch E.* — Ueber die Metallverbindungen der Aldehyd- und Keton-Kondensationsprodukte der Säurehydrazide. Heidelberg, 1903. 8°.
- Münch G.* — Ueber Diäthylresorcin und seine Derivate. Heidelberg, 1902. 8°.
- Neff J. H.* — Zwei Fälle von Exophthalmus pulsans traumaticus. Heidelberg, 1902. 8°.

- Paege E.* — Zwei Beiträge zur Harnröhrenchirurgie: I. Ueber Harnröhrenresektion bei polypösem Sarkom der pars bulbosa. II. Ueber Harnröhrenregeneration nach Defekten im Gefolge von Strikturen. Heidelberg, 1903. 8°.
- Reichard A.* — Ueber Cuticular-und Gerüst-Substanzen bei wirbellosen Tieren. Frankfurt, 1902. 8°.
- Renz F.* — Die Colporrhaphia fusiformis und deren Ergebnisse. Heidelberg, 1903. 8°.
- Ritzhaupt O.* — Ein Fall von tumorartiger, secundärer Leberaktinomykose. Heidelberg, 1903. 8°.
- Rönneburg A.* — Ueber eine Synthese von Pyrazolen aus Acetylaceton und Diazoessigester. Heidelberg, 1903. 8°.
- Rothmund C.* — Controlle der Pavy'schen Methode für die quantitative Zuckerbestimmung, nebst einem Beitrag zur normalen Reduktionskraft des Harnes. Heidelberg, 1903. 8°.
- Saager A.* — Ueber Derivate des Phenoxazins. Stuttgart, 1902. 8°.
- Sänger W.* — Ueber Condensationen von Formaldehyd mit 1, 3-Diketonen. Heidelberg, 1903. 8°.
- Schmitz A. J.* — Ueber das Hydrazid der Trimesinsäure und der Hemimellithsäure. Heidelberg, 1902. 8°.
- Schneider W.* — Nitril und Amid der Phenyllutidindicarbonsäure. Heidelberg, 1903. 8°.
- Schobess R.* — Die Behandlung der Chorioiditis disseminata mit Natrium salicylicum. Heidelberg, 1903. 8°.
- Schröter F.* — Ueber Kondensationen von β -Oxy- α -Naphtaldehyd mit Acetessigester und Analogen. Breslau, 1902. 8°.
- Schuch H.* — Ueber die Einwirkung von Hydrazinhydrat und Semicarbazidchlorhydrat auf Oxymethylencampher. Heidelberg, 1902. 8°.
- Sevin O.* — Beitrag zur Kenntnis von sieben- und mehrgliedrigen heteroatomigen Ringen. Heidelberg, 1902. 8°.
- Steiner F.* — Ueber die Reduktion ungesättigter Phenoläther. Heidelberg, 1902, 8°.
- Strumpf O.* — Nitrile und Amide von Pyridindicarbonsäuren. Halle 1902. 8°.
- Tomaszewski A.* — Ueber Spaltungen des Benzoin unter dem Einfluss katalytisch wirkender Substanzen. Breslau, 1902, 8°.
- Umber H.* — Ueber aliphatische Heptylamidosäuren $C_nH_{2n-1}(NH \cdot C_7H_{15})O_2$. Heidelberg, 1902. 8°.
- Warnecke G.* — Ueber Nitrile von Monoalkylacetessigsäuren und über Amidopyrazole. Heidelberg, 1903. 8°.
- Weber W.* — Ueber Monopropylhydrazin und Dipropylhydrazin. Heidelberg, 1903. 8°.
- Wilde A.* — Beiträge zur Anatomie der Linaceen. Heidelberg, 1902. 8°.

Wüstenfeld R. — Ueber die Bildung von Glycyllketten mittelst Säureaziden.
Heidelberg, 1903. 8°.

II. — KIEL.

Adam A. — Zur Kasuistik der Pachymeningitis haemorrhagica im Anschluss
an Trauma. Kiel, 1903. 8°

Althoff E. — Ein Fall von Aneurysma der Aorta ascendens. Kiel, 1903. 8°.

Althoff H. — Neun Fälle von Coxa`vara. Kiel, 1903. 8°.

Antze O. — Ueber primären Lungenkrebs. Kiel, 1903. 8°.

Arnd T. — Ueber die Einwirkung von Semicarbazid auf Benzil, Benzoïn
und verwandte Stoffe. Kiel, 1903. 8°.

Back M. — Exostosis cartilaginea tibiae, eine in der Königl. chirurg. Univer-
sitäts-Klinik zu Kiel operierter und geheilter Fall. Berlin, 1902. 8°.

Being F. — Supramalleolare Längsfracturen der Fibula. Kiel, 1903. 8°.

Bibergeil E. — Beitrag zur Lehre von der ätiologischen und diagnostischen
Bedeutung der „punktirten Erythrocyten“ Ehrlichs. Kiel 1903. 8°.

Bilfinger B. — Ueber plastische Operationen bei Schlussunfähigkeit der
Musculus sphincter ani. Nebst Mitteilung eines nach neuer Methode
geheilten Falls. Kiel, 1903. 8°.

Bilfinger O. — Ueber Leberabscess. Kiel, 1902. 8°.

Bisping H. — Zur Casuistik der Luxatio genu congenita. Kiel, 1902. 8°.

Bockendahl E. — Zur differentialdiagnose zwischen kleinen submukösen
Uterusmyom und chronischer Metritis. Kiel, 1902. 8°.

Boehm E. — Beitrag zur Theorie der gleicharmigen Wage. Kiel, 1902. 8°.

Borghorst B. — Casuistischer Beitrag zur Lehre von der motorischen Aphasie
und ihre Lokalisation. Kiel, 1903. 8°.

Bornstein A. — Beitrag zur Lehre vom Aneurysma der Bauchaorta. Kiel,
1903, 8°.

Böttcher W. — Zur Casuistik der Darminvagination (Ein durch Darmresec-
tion geheilter Fall). Kiel, 1902. 8°.

Boxberger G. — Ueber die Beziehungen der hyperplasierten Thymusdrüse
zum plötzlichen Tode bei Kindern. Würzburg, 1903, 8°.

Burdach A. — Der Nachweis der Typhusbacillen am Menschen. Leipzig,
1902. 8°.

Braess L. — Ueber Pfählungsverletzungen. Kiel, 1902, 8°.

Chastinet M. — Casuistischer Beitrag zur tabes dorsalis mit Ophthalmo-
plegie und Muskelatrophie. Kiel, 1902. 8°.

Dammermann H. — Zur Casuistik der Ophthalmoplegie bei Tebes dorsalis.
Kiel, 1903. 8°.

Darger W. — Zur Kenntniss der Kraurosis vulvae. Berlin, 1902. 8°.

Dege A. — Trinkwasserreinigung mit besonderer Berücksichtigung der mi-
litärischen Verhältnisse. Kiel, 1903. 8°.

- Delvenhthal K.* — Ein Fall von weit verbreiteter Verkalkung der mittleren und kleineren Arterien der Haut und der Extremitäten. Kiel, 1902. 8°.
- Eckstein H.* — Ein Fall von primärer Darmtuberkulose. Kiel, 1902. 8°.
- Ehmke U.* — Ueber die Sydactylie. Kiel, 1902. 8°.
- Emden O. M.* — Ueber Schussverletzung der Leber im Krieg und Frieden. Kiel, 1903. 8°.
- Fischer W.* — Ueber Kiemengangscysten. Kiel, 1903. 8°.
- Freyer E.* — Ueber das Rhabdomyosarkom der Niere. Kiel, 1902. 8°.
- Friderici A.* — Ein Fall von spontan geheiltem subphrenischen Abscess. Kiel. 1903. 8°.
- Frohwein F.* — Ein Fall von primärem Coecumcarcinom mit seltenen Metastasen. Kiel, 1903. 8°.
- Furlkröger H.* — Ueber Angioma cavernosum und Mitteilung eines Falles von Angioma cavernosum der rechten Fusssohle und des Calcaneus. Kiel, 1903. 8°.
- Gericke P.* — Beitrag zum Facialiskrampf. Kiel, 1903. 8°.
- Götttsche J.* — Ueber Psychosen nach Eklampsie. Kiel, 1902. 8°.
- Grabley A.* — Pfählungsverletzungen. Leipzig, 1903. 8°.
- Greeven J.* — Ein Beitrag zur Casuistik der perforirten Magengeschwüre. Lübecke, 1902. 8°.
- Grelck J.* — Ueber Arthropathien bei Tabes. Kiel, 1903. 8°.
- Greve H.* — Zur Statistik der primären und secundären Leberkrebs. Kiel, 1901. 8°.
- Gulat-Wellenburg (W. K. H. v.).* — Calcaneusexostose. Kiel, 1903. 8°.
- Hamel O.* — Ueber Harnröhrenstricturen. Kiel, 1902. 8°.
- Hansen H.* — Ueber Paralysis agitans mit Extensionstypus, Kiel, 1903. 8°.
- Heger E.* — Ueber Gaumentumoren nebst Mitteilung eines Falles von Sarkom des harten Gaumens. Kiel, 1902. 8°.
- Heidsieck C.* — Ein Fall von Echinococcus hepatis mit Durchbruch in die Blase. Kiel, 1903. 8°.
- Hempell H.* — Ein Fall von Luxation der Sehne des Extensor digiti V. proprius nach Trauma. Kiel, 1903. 8°.
- Hertz W.* — Ueber partielle Differentialgleichungen, die in der Variationsrechnung vorkommen. Göttingen, 1903. 4°.
- Hesse E.* — Kasuistischer Beitrag zur Lehre von der operativen Darmausschaltung. Kiel, 1903. 8°.
- Hesse G.* — Beiträge zur Herstellung von Nährböden und zur Bakterienzüchtung. Dresden, 1903. 8°.
- Heymann F.* — Die Spaltungsprodukte des symmetrischen Dinitrobenzoylacetessigesters. Kiel, 1903. 8°.
- Hoffmans C.* — Ueber Bauchschussverletzungen. Kiel, 1902. 8°.
- Hohenkirch B.* — Beitrag zur Kasuistik der Fälle von Echinococcus hepatis

- unter Anführung zweier Fälle aus der chirurgischen Klinik zu Kiel aus den Jahren 1899 und 1903. Kiel, 1903. 8°.
- Janssen L.* — Ein Fall von Aneurysma spurium der Carotis interna und Vena jugularis communis sinistra infolge Stichverletzung. Kiel, 1903. 8°.
- Janz E.* — Casuistischer Beitrag zur Lehre von der Aphasie. Kiel, 1903. 8°.
- Jess E.* — Ein Beitrag zur Lehre vom induzierten Irresein. Kiel, 1903. 8°.
- Kaehler K.* — Ueber die durch Wasserfälle erzeugte Leitfähigkeit der Luft, Kiel, 1903. 8°.
- Kerssenboom J.* — Ueber einen Fall von Hysterie, verbunden mit organischer Gehirnerkrankung und dementia senilis. Kiel, 1903. 8°.
- Köbrich R.* — Ein Fall von cavernöser Umwandlung der Pfortader. Kiel, 1903. 8°.
- König A.* Zur Kenntnis der Dauerresultate nach Hauttransplantation. Kiel, 1901. 8°.
- Kreft E.* — Ueber jauchige Meningitis als Folge von Decubitus. Kiel, 1903. 8°.
- Kruse E.* — Ein Fall von Meningocele occipitalis. Kiel, 1902. 8.
- Laband L.* — Beitrag zur Lehre von den Benzoylestern der Kohlenhydrate im Harn. Kiel, 1903. 8°.
- Ladisch W.* — Ein Fall von Akromegalie mit bitemporaler Hemianopsie. Kiel, 1903. 8°.
- Latz B.* — Beobachtungen bei der klinischen Untersuchung und Operation eines Falles von Sarkoma cerebri. Kiel, 1903. 8°.
- Leisner F.* — Ueber konservative Behandlung der in den ersten Schwangerschaftsmonaten unterbrochenen Tubargravidität. Kiel, 1903. 8°.
- Lenschau E.* — Spontanheilung eines Pneumothorax phthisicus. Kiel, 1903. 8°.
- Leschke M.* — Beiträge zur Kenntnis der pelagischen Polychaetenlarven der Kieler Förde. Kiel, 1903. 4°.
- Lorenz H.* — Beiträge zur Kenntnis der Keimung der Winterknospen von *Hydrocharis morsus ranae*, *Utricularia vulgaris* und *Myriophyllum verticillatum*. Kiel, 1903. 8°.
- Luyken E.* — Ein Fall von combinirter Misbildung aus dem pathologischen Institute zu Kiel. Kiel, 1903. 8°.
- Maether E.* — Die Resultate der Sehnennaht aus der Königl. Chirurg. Klinik zu Kiel 1899-1902. Kiel, 1903. 8°.
- Mahr J.* — Ueber Verkrümmung des Beines nach Resektion des Kniegelenkes im Kindesalter. Kiel, 1903. 8°.
- Marcus H.* — Vom Tetanus neonatorum und seiner Behandlung mit Serum-einspritzungen. Kiel, 1903. 8°.
- Matzen J.* — Ein Beitrag zur Kasuistik des Tetanus. Kiel, 1903. 8°.
- Mayer F.* — Ein Fall von traumatischer Fraktur des Oberschenkelhalses bei einem vierjährigen Kinde. Kiel, 1902. 8°.

- Messer H.* — Kasuistische Beiträge zur Lehre von der Syringomyelie. Glückstadt, 1903. 8°.
- Meyer Hans.* — Ueber traumatische Aneurysmen als Komplikation der Knochenbrüche. Kiel, 1902. 8°.
- Meyer Herm.* — Casuistischer Beitrag zur Lokalisation der amnestischen und sensorischen Aphasie. (Ein Fall von Tumor des linken Schläfenlappens). Kiel, 1903. 8°.
- Meyer J.* — Zwei Fälle von Gummabildung in der Leber. Kiel, 1902. 8°.
- Meyer K.* — I. Ueber das Amid der Acetessigsäure. — II. Beiträge zur Kenntnis der Isoxazole. Kiel, 1903. 8°.
- Meyer-Westfeld D.* — Ein Beitrag zur Kasuistik des *Cysticercus racemosus* des Gehirns. Kiel, 1903. 8°.
- Müller R.* — Ueber subnormale Körpertemperaturen, ihr Vorkommen und ihre Behandlung. Kiel, 1903. 8°.
- Mumm O.* — Beiträge zur Kenntnis der Isoxazole. Kiel, 1902. 8°.
- Noeszelt O.* — Zur Histologie der Gliome. Kiel, 1903. 8°.
- Odefey Th.* — Kasuistische Beiträge zur Lehre von den Fremdkörpern des Uterus. Kiel, 1902. 8°.
- Ohm W.* — Fremdkörper in der Orbita. Kiel, 1902. 8°.
- Olufsen L.* — Untersuchungen über Wundperidermbildung an Kartoffelknollen. Jena, 1903. 8°.
- Peltz W.* — Beiträge zur Kenntnis der Propargylaldehyds und des aus ihm gewonnenen Isoxazols. Kiel, 1902. 8°.
- Pfüttsch H. W. H.* — Ueber Psychosen im Verlauf der Typhus abdominalis. Kiel, 1903. 8°.
- Piccard E. F.* — Beiträge zur physischen Geographie des Finnischen Meerbusens. Kiel, 1903. 8°.
- Plass Th.* — Ueber Thoracoplastik unter Berücksichtigung von 6 in der chirurgischen Klinik zu Kiel operierten Fällen. Kiel, 1903. 8°.
- Prölss W.* — Ein Beitrag zur Lehre von der Syringobulbie und Syringomyelie. Kiel, 1903. 8°.
- Pust W.* — Die Tuberkulose der Thymus. Kiel, 1903. 8°.
- Ramsauer C.* — Ueber den Ricochetschuss. Voorde, 1903. 8°.
- Reerschmied P.* — Ueber einen Fall von chronischer Myelitis im Anschluss an Typhus abdominalis. Kiel, 1903. 8°.
- Reinits O.* — Ueber die congenitale Stenose und Obliteration am Isthmus Aortae. Kiel, 1902. 8°.
- Reinke J.* — De evolutione comparativa Laminariacearum. Kiel, 1903. 8°.
- Reinking F.* — Ueber den Einfluss der Alkoholverbände auf den Verlauf entzündlicher Prozesse. Kiel, 1903. 8°.
- Ricke F.* — Ein Fall von primärer Lungenaktinomykose mit tödlicher Blutung. Kiel, 1903. 8°.

- Reitscher J.* — Ueber Scharlachabscesse an der Hand einer Falles von Aneurysma arteriovenosum spurium carotidis communis et jugularis internae infolge eines solchen. Kiel, 1903. 8°.
- Rosenbaum P.* — Ein Beitrag zur Aetiologie der Hirnblutungen. Kiel, 1903. 8°.
- Rosenthal R.* — Zur Causistik des Ileus. Drei Falle von Ileus, entstanden durch peritonitische Adhaesionen. Kiel, 1903. 8°.
- Rüdiger G.* — Zum Casuistik erfolgreicher chirurgischer Eingriffe bei Hysteria gravis. Kiel, 1903. 8°.
- Rudolf H.* — Kasuistischer Beitrag zur Würdigung und Methodik plastischer Operationen bei Narbenkontrakturen durch Verbrennung. Kiel, 1903. 8°.
- Rudolph W.* — Zwei Fälle von membranöser Bronchitis. Kiel, 1903. 8°.
- Scharpff Th.* — Ueber einen Fall von Salmiakgeistvergiftung. Ludwigsburg, 1903. 8°.
- Scheel M.* — Pflanzenphysiologische Untersuchungen. Kiel, 1902. 8°.
- Scheidtmann W.* — Beiträge zur Casuistik seltener Lipome. Kiel, 1903. 8°.
- Scherenberg R.* — Ueber einen Fall von Tumor cerebri. Lübecke. 1903. 8°.
- Schinke A.* — Casuistischer Beitrag zur Chorea chronica progressiva (Huntington'sche Chorea). Kiel, 1903. 8°.
- Schlitt R.* — Untersuchungen über einen Specialfall des Problems der drei Körper mit nahezu periodischer Lösung. Kiel, 1903. 8°.
- Scholz W.* — Ueber Infektion mit Tuberkulose durch den Verdauungskanal. Kiel, 1902. 8°.
- Schönfeld O.* — Ein Fall von Aplasie der rechten Niere bei einem an Retropharyngealabscesse gestorbenen Kinde. Sommerfeld, 1903. 8°.
- Schreiber A.* — Ein Fall von primärem Prostata-Krebs. Kiel, 1903. 8°.
- Schreiber L.* — Ueber einen Fall von Bantischer Krankheit. Kiel, 1903. 8°.
- Schroeder H.* — Ein Fall von primärem Krebs der Lunge. Heidelberg, 1902. 8°.
- Schubart A.* — Ueber psychische Störungen bei Chorea minor. Kiel, 1903. 8°.
- Schüler M.* — Ueber funktionelle Albuminurie. Kiel, 1903. 8°.
- Schulz R.* — Beitrag zur Symptomatologie der Pseudobulbärparalyse (cerebro-bulbäre Form). Kiel, 1903. 8°.
- Schultze G.* — Ein Fall von einer vom Processus vermiformis ausgehenden eitrigen Perforationsperitonitis bei einer wegen Stenosirenden Pyloruscarcinoms angelegten Gastroenterostomia retrocolica anterior. Kiel, 1902. 8°.
- Schütt K.* — Ueber Zähigkeit und Festigkeit in der Oberfläche von Flüssigkeiten und über flüssige Lamellen. Voorde bei Kiel, 1903. 8°.
- Schwarz A.* — Ueber Schädelbasisfrakturen nebst Mitteilung von 38 Fällen aus der chirurgischen Klinik zu Kiel. Kiel, 1903. 8°.

- Siebold K.* — Klinischer und anatomischer Beitrag zur Lehre von der Aphasie. Kiel, 1903. 8°.
- Sievert J.* — Beitrag zur Lehre von den Psychosen bei Infektionskrankheiten. Ein Fall von Psychose bei gonorrhöischer Infektion. Kiel, 1902. 8°.
- Spier W.* — Kasuistischer Beitrag zur Lehre der Wirbelverletzungen. Kiel, 1903. 8°.
- Spliedt G.* — Aorten-Aneurysmen und Syphilis. Kiel, 1903. 8°.
- Sprengel G.* — Zur Casuistik der Gelenkkörper des Kniegelenks. Kiel, 1903. 8°.
- Stenger E.* — I. Ueber eine neue Synthese unsymmetrisch substituierter Pyrrole. — II. Ueber Acetonoxaminsäure. Kiel, 1903. 8°.
- Stiehr G.* — Ueber das Verhalten der Wurzelhärrchen gegen Lösungen. Kiel, 1903. 8°.
- Straeten E.* — Ein Fall von Syringomyelie mit Cheiromegalie. Kiel, 1903. 8°.
- Teller E.* — Beitrag zur Kenntnis der mechanischen Hergänge bei der Entstehung der Frakturen des Schädeldaches. Kiel, 1903. 8°.
- Thaler F.* — Die diffuse Reflexion des Lichtes an matten Oberflächen. Voorde, 1903. 8°.
- Thies O.* — Die in den Jahren 1899-1902 in der Königl. Chirurg. Klinik zu Kiel zur Behandlung gekommenen Fälle von Hernia epigastrica. Kiel, 1903. 8°.
- Tödter J.* — Ein Fall von Sehnervenatrophie durch Traume. Kiel, 1903. 8°.
- Toeche Mittler S.* — Zur Molekulargewichtsbestimmung nach dem Siedeverfahren. Berlin, 1903. 8°.
- Trompke A.* — Ueber einen Fall von Chromsäurevergiftung. Kiel, 1902. 8°.
- Twenhöven A.* — Casuistischer Beitrag zur peripheren Facialislähmung. Kiel, 1903. 8°.
- Ulatowski (W. v.)* — Beitrag zur Kasuistik operativ behandelter Lungengangrän. Kiel, 1903. 8°.
- Voss W.* — Neue Versuche über das Winden des Pflanzenstengels. Kiel, 1902. 4°.
- Vosschulte A.* — Zur Casuistik der operation Behandlung des *Morbus Basedowii*. Kiel, 1903. 8°.
- Walkmann A.* — Zur Casuistik der Diabetischen Gangrän nach den Erfahrungen in der chirurgischen Klinik zu Kiel. Plön, 1903. 8°.
- Wanderscheck H.* — Zur Kenntnis des μ -Benzylisochinolins und des μ - β -Dibenzylisochinolins. Wilhelmshaven, 1903. 8°.
- Wasmer K.* — Ueber Spontanheilung von Lungenabszessen und Lungengangrän. Kiel, 1903. 8°.
- Wenglein O.* — Ueber Perithitfeldspäthe. Kiel, 1903. 8°.
- Wich W.* — Ein Beitrag zur Kenntnis der angeborenen Geschwülste der Kreuz- und Steissbeingegegend. Kiel, 1903. 8°.

- Wiemer W. Th. — Zur Casuistik der Behandlung der intermittierenden Hydronephrose. (Nierenbeckenschnitt mit Ureterplastik). Hildesheim, 1903. 8°.
- Wilke A. — Pfortaderthrombose und Trauma. Kiel, 1903. 8°.
- Winters W. — Ueber einem Fall von Exostosis tibiae. Kiel, 1903. 8°.
- Wolf C. T. S. — Ueber Mammacarcinome. (Eine Fortsetzung der Arbeit von Dr. Spethmann). Kiel, 1903. 8°.
- Wolf H. — Ueber einen Fall von traumatischer Nierenbecken-Zerreissung. Kiel, 1903. 8°.
- Wossidlo G. — Vier Fälle von Peniskarcinom. Kiel, 1902. 8°.
- Wurmb A. — Ein Fall von multiplen Exostosen. Kiel, 1903. 8°.
- Zernick A. — Beitrag zur Statistik der modifizierten Linear-Extraktion. Kiel, 1903. 8°.
- Ziegler O. — Totale nucleäre Ophthalmoplegie mit Tabes-Paralyse und Opticusatrophie. Kiel, 1903. 8°.
- Zimmermann P. — Ein Beitrag zu unserer Kenntnis von der Netzhautablösung nach der Fukalaschen Operation. Kiel, 1903. 8°.
- Zurhorst H. — Ueber Gallendurchbruch des Ductus cysticus unmittelbar vor seiner Einmündung in den Ductus choledochus. Kiel, 1903. 8°.

V. C.